دانشگاه صنعتی اصفهان
Isfahan University of Technology

رئولوژی پیشرفته

استاد درس

دکتر علی زادهوش

فصل چهارم

جریان سیالات غرنیوتنی

۱۳۹۹

❖ مباحثی که در این فصل به آن پرداخته می شود:

1) رابطه میان شدت جریان حجمی و افت فشار
2) رابطه توزیع تنش برشی و تنش برشی در دیواره
3) رابطه توزیع سرعت برشی، میانگین سرعت و ماکزیمم سرعت
4) معیار های آشفتگی و آرام بودن

- تمامی این بحث هارا برای شکل های هندسی مختلف می توان به دست آورد:

➢ شکل های هندسی:

1) لوله مدور
2) جریان میان دو صفحه ← رئومتر شکافی
3) جریان درون حلقه
4) جریان روی سطح شیب دار ← بعضی از اشکال هندسی وجود دارند که از ترکیب چند شکل هندسی پایه تشکیل شده، باید بتوان جداسازی نمود و چند رابطه نوشت.

در قبل روابط کلی برای رئومتر شکافی یا به عبارت دیگر صفحه های موازی به دست آمد که در زیر آمده است:

$$\frac{Q}{2w} = \int_0^{\frac{H}{2}} V_z \, dh$$

$$\tau_w = \frac{\tau_H}{2h}$$

اما در اینجا می خواهیم برای حالتی که نیوتنی باشد، روابطی را به دست آوریم:

❑ حالت خاص نیوتنی در جریان میان دو صفحه:

برای حالت نیوتنی دیگر $\dot{\gamma}_{wa}$ نداریم و سیال واقعی می باشد:

$$n = 1 \,, k = \mu$$

$$\frac{6Q}{wH^2} = \dot{\gamma}_w$$

$$\frac{H\,\Delta P}{2L} = \mu\left(\frac{6Q}{wH^2}\right) \qquad (۱)$$

$$\boxed{Q = \frac{wH^3\,\Delta P}{12\,\mu\,L}} \qquad (۲)$$

$$\boxed{Q = \frac{A\,\Delta P}{\mu}} \qquad (۳)$$

که در اینجا A طبق رابطه زیر حساب می شود:

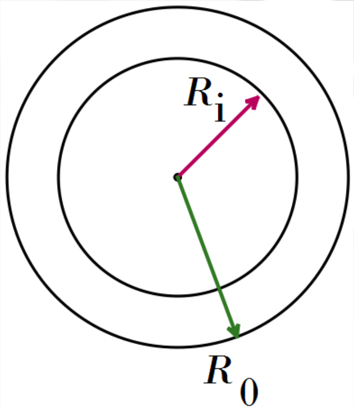
$$A = \frac{wH^3}{12L}$$

A یک ثابت است که به شکل هندسی (H,L,W) مربوط است.

یکی دیگر از مباحث مربوط به الیافی است که تو خالی هستند این الیاف تحت جریان در حلقه به وجود می آیند. بنابراین می خواهیم این نوع جریانات را بررسی کنیم.

❑ جریان درون یک حلقه:

Annulus



در اینجا نیز مباحث narrow gap و wide gap گفته می شود و مطرح است.

چون نازک است حالت narrow gap بوده و تغییرات خطی داریم.

در اینجا اگر حلقه را باز کنیم به همان جریان میان دو صفحه موازی با فاصله کم تبدیل می شود.

بنابراین با این تقریب جلو می رویم:

فاصله بین دو حلقه درونی و بیرونی $= \frac{1}{2}(R_0 + R_i)$

برای سیال نیوتنی گفته شد:

$$Q = \frac{wH^3\,\Delta P}{12\,\mu\,L}$$

$$w = 2\pi\left(\frac{R_0 + R_i}{2}\right) = \pi(R_0 + R_i)$$

$$H = R_0 - R_i$$

بعد از جایگذاری در رابطه اصلی خواهیم داشت:

$$\boxed{\boldsymbol{Q = \frac{\pi(R_0 + R_i)(R_0 - R_i)^3\,\Delta P}{12\mu L}}} \qquad (۴)$$

برای سیال واقعی مستقل از زمان:

$$\frac{H\,\Delta P}{2L} = k''\left(\frac{6Q}{wH^2}\right)^{n''}$$

این روابط را قبلا به دست آوردیم.

$$\left(\frac{H\,\Delta P}{2LK''}\right)^{\frac{1}{n''}} = \frac{6Q}{wH^2}$$

✓ حال به جای w و H مقادیر مربوط به این حالت حلقه را جایگذاری می کنیم:

$$Q = \frac{wH^2}{6}\left(\frac{H\,\Delta P}{2LK''}\right)^{\frac{1}{n''}} \qquad (۵)$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi(R_0+R_i)(R_0-R_i)^2}{6}\left(\frac{(R_0-R_i)\,\Delta P}{2LK''}\right)^{\frac{1}{n''}}} \qquad (۶)$$

در بعضی موارد نیاز است که max نرخ برشی ایجاد شده را بدانیم: $(\dot{\gamma}_w)_{max}$

این رابطه را می توان از معادله پایه برای شکاف و با جایگزین کردن پارامترهای مناسب به دست آورد:

✓ قبلا برای رئومتر شکافی به دست آمده است:

$$-\dot{\gamma}_w = \frac{2}{wH^2}\left(2Q + \Delta P\frac{dQ}{d\,\Delta P}\right)$$

$$-\dot{\gamma}_w = \frac{2}{\pi(R_0 + R_i)(R_0 - R_i)^2}\left(2Q + \Delta P \frac{dQ}{d\,\Delta P}\right) \qquad (۷)$$

و اگر مقدار n'' را داشته باشیم:

$$-\dot{\gamma}_w = \left(\frac{2n'' + 1}{3n''}\right)\frac{6Q}{wH^2}$$

$$\boxed{-\dot{\gamma}_w = \frac{2(2n'' + 1)}{n''}\frac{Q}{\pi(R_0 + R_i)(R_0 - R_i)^2}} \qquad (۸)$$

در ادامه می خواهیم توزیع سرعت را در انواع مختلف رئومترها و سطح مقطع ها بررسی کنیم.

❑ توزیع سرعت برای جریان میان دو صفحه موازی (برای حالت خاص پاورلا)

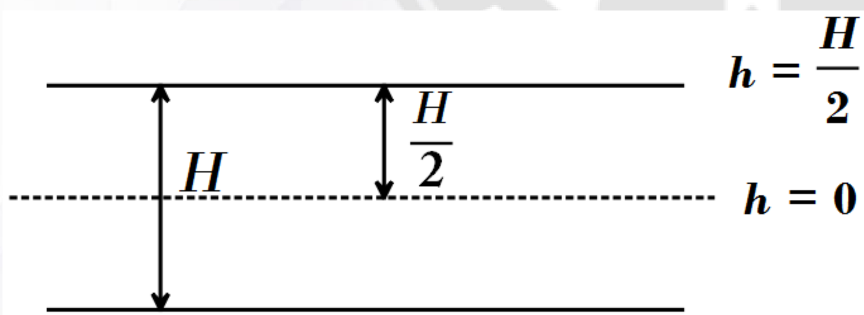
$$\tau = k(\dot{\gamma})^n \qquad \tau = \frac{h\,\Delta P}{L}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{dV_z}{dh} = \left(\frac{h\,\Delta P}{Lk}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \frac{h\,\Delta P}{L} = k(\dot{\gamma})^n$$

حال انتگرال گیری می کنیم و حدودا مشخص می کنیم تا به رابطه برسیم:

$$\int dV_z = \left[\frac{1}{k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} \int h^{\frac{1}{n}}\,dh \rightarrow \qquad V_z = \left[\frac{n}{n+1}\right]\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} h^{\frac{n+1}{n}} + c$$

ثابت انتگرال



برای به دست آوردن رابطه ثابت انتگرال باید $V_z = 0$ قرار دهیم که این حالت در $h = \frac{H}{2}$ رخ می دهد. بنابراین:

$$c = -\left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

- ✓ **رابطه توزیع سرعت برای سیال پاورلا میان دو صفحه ی موازی برای جریان آرام**

$$V_z = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left[\left(\frac{2h}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1\right]$$

حال می خواهیم رابطه سرعت ماکزیمم را نیز به دست آوریم:

در وسط فاصله میان دو صفحه موازی یعنی جایی که $h = 0$ ، سرعت سیال در حالت max قرار دارد.

$$h = 0 \rightarrow V_z = \max$$

- ✓ **رابطه سرعت ماکزیمم برای سیال پاورلا میان دو صفحه موازی برای جریان آرام**

$$V_{max} = -\left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\left(\frac{H}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

دانشگاه صنعتی اصفهان
Isfahan University of Technology

این دو رابطه را با هم مخلوط می کنیم و توزیع سرعت را بر حسب سرعت max به دست می آوریم:

$$V_z = V_{max}\left[1-\left(\frac{2h}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

✓ **رابطه توزیع سرعت برای سیال پاورلا میان دو صفحه موازی بر حسب V_{max} برای جریان آرام**

حال می خواهیم توزیع سرعت را بر حسب سرعت میانگین به دست آوریم.

برای اینکار لازم است ابتدا رابطه سرعت میانگین را به دست آوریم:

$$\tau_w = k(\dot{\gamma}_w)^n$$

سرعت متوسط $\bar{V}_z = \frac{Q}{wH}$

$$-\dot{\gamma}_w = \frac{2n+1}{3n}\left(\frac{6Q}{wH^2}\right)$$

جایگذاری در رابطه پاورلا:

$$\frac{H\,\Delta P}{2L} = -K\left(\frac{2n+1}{3n}\right)^n\left(\frac{6Q}{wH^2}\right)^n$$

بعد از ساده سازی های فراوان:

$$\bar{V}_z = -\frac{H}{6}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)\left[\frac{H}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\bar{V}_z = V_{max}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)$$

✓ **رابطه توزیع سرعت برای سیال پاورلا میان دو صفحه موازی بر حسب سرعت میانگین**

$$V_z = \bar{V}_z\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\left[1-\left(\frac{2h}{H}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

حال می خواهیم منابع خطا را بیان کنیم: لغزش در دیواره که باعث ایجاد فیلامنت های موج دار می شود.

جایی که v سرعت در فاصله h از خط مرکزی میان دو سطح با فاصله H باشد:

اگر سرعت در دیواره را صفر فرض کنیم و مقدار آن را با V_w نشان دهیم.

بنابراین ما می توانیم از رابطه به دست آمده انتگرال گیری کنیم: $h = \frac{H}{2}$

$$\dot{\gamma} = -\frac{dV}{dh}$$

$$-\int_V^{V_w} dV = \int_0^{\frac{H}{2}} \dot{\gamma}\, dh \rightarrow \quad V - V_w = \int_0^{\frac{H}{2}} \dot{\gamma}\, dh \rightarrow$$

یادآوری:

$$\tau = \frac{2h}{H}\tau_w \rightarrow dh = \frac{H}{2\tau_w}d\tau$$

با توجه به یادآوری ذکر شده در صفحه قبل خواهیم داشت:

$$V = V_w + \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{\dot{\gamma} H}{2\tau_w} d\tau$$

از طرف دیگر شدت جریان حجمی برای جریان وقتی $H \ll w$ باشد، به صورت زیر تعریف می گردد:

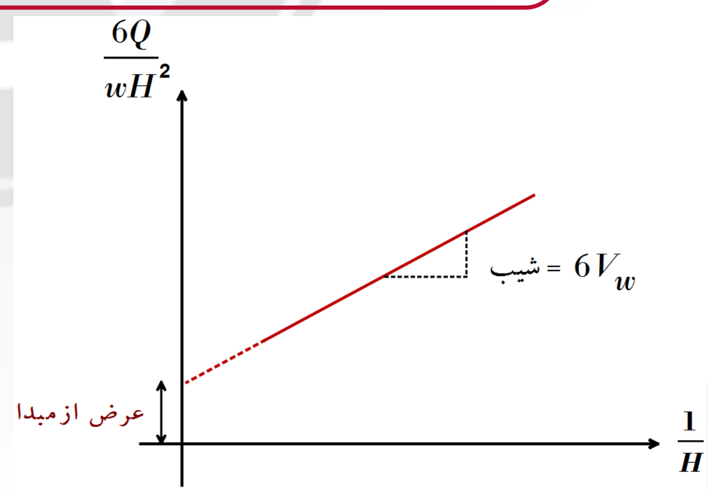
$$Q = 2w \int_0^{\frac{H}{2}} V dh \rightarrow Q = 2w \int_0^{\tau_w} \left(V_w + \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{\dot{\gamma} H}{2\tau_w} d\tau \right) \frac{H}{2\tau_w} d\tau \rightarrow$$

$$Q = \frac{wH}{\tau_w} \int_0^{\tau_w} \left(V_w + \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{\dot{\gamma} H}{2\tau_w} d\tau \right) d\tau$$

بعد از مرتب کردن و ساده سازی های بیشتر خواهیم داشت:

$$Q = wHV_w + \frac{wH^2}{2{\tau_w}^2} \int_0^{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} \dot{\gamma}\, d\tau\, d\tau \rightarrow \boxed{\frac{6Q}{wH^2} = 6V_w \frac{1}{H} + \frac{\tau}{{\tau_w}^2} \int_0^{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} \dot{\gamma}\, d\tau\, d\tau}$$

$$y = mx + c$$



توزیع سرعت برای جریان در لوله: (برای حالت خاص پاورلا)

برای مطالعات فرآیندهای رئولوژیکی نیاز به دانش توزیع سرعت در لوله ، متوسط سرعت، سرعت max و... می باشد.

در اینجا فقط برای سیال پاورلا درون لوله توزیع سرعت بیان می شود.

ΔP مستقل از z:

$$\tau = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) \rightarrow \tau = \frac{r\,\Delta P}{2L}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{dV_z}{dr}$$

برای پاورلا $\tau = k(\dot{\gamma})^n$

انتگرال گیری می کنیم:

$$\frac{dV_z}{dr} = \left[\frac{r}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} \rightarrow \int dV_z = \left[\frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} \int r^{\frac{1}{n}}\,dr \rightarrow V_z = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} r^{\frac{n+1}{n}} + c$$

ثابت انتگرال

برای به دست آوردن ثابت انتگرال باید $V_z = 0$ قرار دهیم که این حالت در $r = R$ رخ می دهد. بنابراین:

$$r = R \rightarrow V_z = 0$$

$$c = -\left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}$$

✓ **رابطه توزیع سرعت برای سیال پاورلا درون یک لوله مدور برای جریان آرام**

$$V_z = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1\right]$$

حال می خواهیم رابطه سرعت ماکزیمم را نیز به دست آوریم:

در مرکز لوله مدور یعنی جایی که $r = 0$ باشد، سرعت سیال در حالت max قرار دارد.

$$r = 0 \rightarrow V_z = max$$

✓ **رابطه سرعت ماکزیمم برای سیال پاورلا درون یک لوله مدور برای جریان آرام**

$$V_{max} = -\left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}$$

این دو رابطه را با هم مخلوط می کنیم و توزیع سرعت را بر حسب سرعت max به دست می آوریم:

✓ **رابطه توزیع سرعت برای سیال پاورلا درون یک لوله مدور بر حسب V_{max} برای جریان آرام**

$$V_z = V_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

حال می خواهیم توزیع سرعت را بر حسب سرعت میانگین به دست آوریم. برای اینکار ابتدا لازم است رابطه سرعت میانگین را به دست آوریم:

$$\bar{V}_z = \frac{Q}{\pi R^2}$$ سرعت متوسط

$$-\dot{\gamma}_w = \left(\frac{3n+1}{4n}\right)\frac{4Q}{\pi R^3} \qquad \tau_w = k(\dot{\gamma}_w)^n$$

جایگذاری در رابطه پاورلا:

$$\frac{R\,\Delta P}{2L} = k\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n\left(\frac{Q}{\pi R^3}\right)^n$$

بعد از ساده سازی های فراوان:

$$\boxed{\bar{V}_z = \left(\frac{n}{3n+1}\right)\left[\frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\right]^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$\boxed{\bar{V}_z = V_{max}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)}$$

$$\boxed{\frac{V_z}{\bar{V}_z} = \frac{3n+1}{n+1}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}$$

در مباحث قبلی جریان درون یک لوله مدور بررسی شد و برای ۲ حالت از جمله خاص نیوتنی و خاص پاورلا این روابط به دست آمد. در اینجا می خواهیم روابط مربوط به شدت جریان حجمی و دیگر روابط را برای سیال درون یک لوله مدور در حالتی که از نوع بینگهام پلاستیک است، بررسی کنیم:

سیال بینگهام پلاستیک در درون یک لوله مدور

$$\frac{Q\tau_w{}^3}{\pi R^3} = \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau)\, d\tau \qquad (۱)$$

معادله پایه

$$\tau = \tau_0^B + \mu_p \dot{\gamma} \qquad (۲)$$

$$\dot{\gamma} = f(\tau) = \frac{\tau - \tau_y}{\mu_p} \qquad (۳)$$

برای سیال بینگهام پلاستیک ممکن است ۳ حالت رخ بدهد:

$$1)\ f(\tau) = \frac{\tau - \tau_y}{\mu_p} \qquad \boldsymbol{\tau > \tau_y}$$

- اگر تنش وارد شده بیش از تنش تسلیم سیال باشد، سیال برش می خورد.

$$2)\ f(\tau) = 0 \qquad \boldsymbol{\tau < \tau_y}$$

- اگر تنش وارد شده کمتر از تنش تسلیم باشد، سیال برش نمی خورد.

$$3)\ f(\tau) = \frac{\tau - \tau_y}{\mu_p} \qquad \boldsymbol{\tau_w > \tau > \tau_y}$$

- اگر تنش وارد شده بیشتر از تنش تسلیم باشد اما از تنش لازم برای برش سیال در دیواره کمتر باشد، قسمتی از سیال برش می خورد و قسمتی حرکت لایه ای و سیلندری انجام می دهند.

حال با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$\frac{Q{\tau_w}^3}{\pi R^3} = \int_0^{\tau_y} \tau^2 \, \cancelto{0}{f(0)} \, d\tau + \int_{\tau_y}^{\tau_w} \tau^2 \left(\frac{\tau - \tau_y}{\mu_p}\right) d\tau \qquad (۴)$$

$$\frac{Q{\tau_w}^3}{\pi R^3} = \int_{\tau_y}^{\tau_w} \left(\frac{\tau^3 - \tau^2\tau_y}{\mu_p}\right) d\tau \qquad (۵) \qquad \rightarrow \frac{Q{\tau_w}^3}{\pi R^3} = \int_{\tau_y}^{\tau_w} \frac{\tau^3}{\mu_p} d\tau - \int_{\tau_y}^{\tau_w} \frac{\tau^2\tau_y}{\mu_p} d\tau$$

بعد از ساده سازی های فراوان:

$$\frac{Q{\tau_w}^3}{\pi R^3} = \frac{1}{\mu_p}\left[\frac{{\tau_w}^4}{4} - \frac{{\tau_y}^4}{4} - \frac{{\tau_w}^3\tau_y}{3} + \frac{{\tau_y}^4}{3}\right] \rightarrow \frac{Q{\tau_w}^3}{\pi R^3} = \frac{{\tau_w}^4}{\mu_p}\left[\frac{1}{4} - \frac{\tau_y}{3\tau_w} - \frac{1}{12}\left(\frac{\tau_y}{\tau_w}\right)^4\right] \rightarrow$$

- ✓ **رابطه شدت جریان حجمی درون یک لوله مدور برای سیال بینگهام پلاستیک برای سیال با جریان آرام.**

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8L\mu_p}\left[1 - \frac{8L\tau_y}{3R\,\Delta P} - \frac{1}{3}\left(\frac{2L\tau_y}{R\,\Delta P}\right)^4\right]}$$

Buckingham باکینگهام

❑ توزیع سرعت برای جریان در لوله: (برای حالت خاص بینگهام پلاستیک)

علامت منفی(–) : به دلیل این است که با افزایش شعاع، سرعت کاهش می یابد.

$$\tau = \tau_y + \mu_p \dot{\gamma}$$

$$\tau - \tau_y = \mu_p \left(-\frac{du}{dr}\right)$$

$$-\frac{du}{dr} = \frac{\tau - \tau_y}{\mu_p}$$

در دیواره R یعنی $u(R)$
در فاصله شعاعی r داریم یعنی $u(r)$

$$-du = \frac{\frac{R\,\Delta P}{2L} - \tau_y}{\mu_p} dr$$

$$\int_{u(r)}^{0} -du = \int_{r}^{R} \frac{\frac{R\,\Delta P}{2L} - \tau_y}{\mu_p} dr$$

بعد از ساده سازی های فراوان:

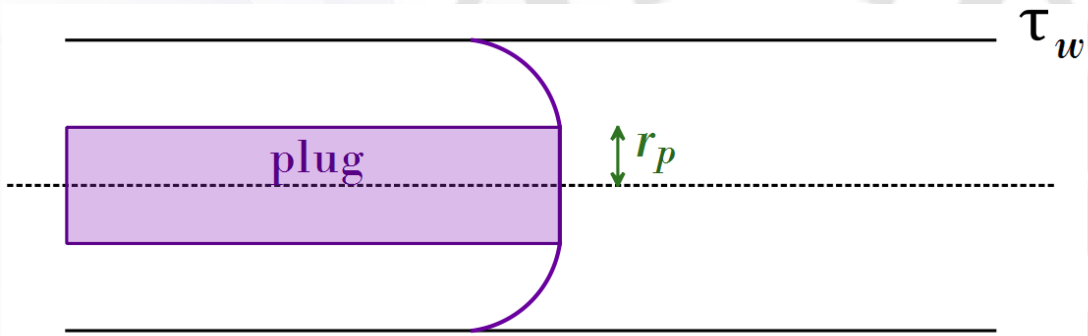
✓ **رابطه توزیع سرعت برای سیال بینگهام پلاستیک درون یک لوله مدور برای جریان آرام**

$$\boxed{u(r) = \frac{(R-r)}{\mu_p}\left[\frac{\Delta P}{4L}(R+r) - \tau_y\right]}$$

گفته شد در حالتی که سیال را بینگهام پلاستیک در نظر بگیریم چون در این حالت یک تنش تسلیم برای سیال در نظر گرفته می شود، حالت plug یا چوب پنبه ای درون لوله ایجاد می شود.

اگر بخواهیم حالت plug را بررسی کنیم و سرعت plug و شعاع plug را به دست آوریم بایستی روابط زیر را بنویسیم. لازم به توضیح است که ممکن است r_p (شعاع plug) با تغییر تنش ، تغییر کند.

هر چه تنش بیشتر شود، قسمت بیشتری از سیال برش می خورد و شعاع plug کم می شود. به عبارت دیگر قسمت های مرکزی نیز برش می خورد.



$$\tau_y = \frac{R_P\,\Delta P}{2L} \qquad\qquad \tau_w = \frac{R\,\Delta P}{2L}$$

$$\frac{\tau_y}{\tau_w} = \frac{R_P}{R} \qquad\qquad u(R_p) = \left(\frac{R-R_P}{\mu_p}\right)\left[\frac{\Delta P}{4L}(R+R_P) - \tau_y\right]$$

$$\boxed{u(R_p) = \left(\frac{R-R_P}{\mu_p}\right)\left[\frac{\Delta P}{4L}(R+R_P) - \frac{R_P\,\Delta P}{2L}\right]}$$

✓ **رابطه سرعت plug درون یک لوله مدور برای یک سیال بینگهام پلاستیک برای جریان آرام.**

$$u(R_p) = \frac{\Delta P}{4L\mu_p}\left[R^2 - 2RR_p + R_p{}^2\right]$$

$$\boxed{u(R_p) = \frac{\Delta P}{4L\mu_p}[R - R_p]^2}$$

✓ رابطه توزیع سرعت plug درون یک لوله مدور برای سیال بینگهام پلاستیک وقتی که plug در نظر گرفته شود.

حال می خواهیم سرعت ماکزیمم را نیز به دست آوریم. اما اینجا برای سیال بینگهام پلاستیک این روابط به دست می آید.

در مرکز لوله یعنی جایی که $r = 0$ باشد، سرعت سیال در حالت max قرار دارد.

$$r = 0 \rightarrow V = max$$

$$\boxed{u_{max} = \frac{R}{\mu_p}\left[\frac{\Delta P}{4L}R - \tau_y\right]}$$

✓ رابطه سرعت ماکزیمم برای سیال بینگهام پلاستیک درون یک لوله مدور برای جریان آرام

حال می خواهیم رابطه سرعت میانگین را درون یک لوله مدور برای یک سیال بینگهام پلاستیک به دست آوریم:

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\boxed{\bar{u} = \frac{R^4\,\Delta P}{8L\mu_p}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{2L\tau_y}{R\,\Delta P}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2L\tau_y}{R\,\Delta P}\right)^4\right]}$$

✓ رابطه سرعت متوسط برای بینگهام پلاستیک درون یک لوله مدور برای جریان آرام

می توان در معادله پایه ارائه شده در ابتدا به جای $f(\tau)$ مدل های مختلف را جایگزین کرد و رابطه فوق را برای هر مدل جداگانه به دست آورد.

مثلا کیسون :

$$\frac{Q{\tau_w}^3}{\pi R^3} = \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau)\, d\tau$$

$$\tau^{\frac{1}{2}} = {\tau_0^c}^{\frac{1}{2}} + \mu_c \dot{\gamma}^{\frac{1}{2}}$$

❑ معیار آشفته و آرام بودن جریان درون لوله

$$\boldsymbol{Re} = \frac{\text{نیروی ویسکوز}}{\text{نیروی اینرسی}}$$

اگر نیروی اینرسی غلبه کند ← آشفته
اگر نیروی ویسکوز غلبه کند ← آرام

آشفته $Re > 2100$

آرام $Re < 2100$

حال برای سیال پاورلا می خواهیم بیان کنیم. یعنی در منابع خطا فرض می کردیم جریان آرام است، حال می خواهیم بیان کنیم اگر جریان آشفته باشد چه می شود؟

$$Q = \pi R^2 V = \pi \left(\frac{n}{3n+1}\right)\left(\frac{-\Delta P}{2kL}\right) R^{\frac{3n+1}{n}} \qquad (۱)$$

برای یک سیال مشخص رابطه بین شدت جریان حجمی و افت فشار در یک شعاع معین

$$-\Delta P \propto Q^n$$
$$Q \propto R^4 \rightarrow n = 1$$
$$Q \propto R^5 \rightarrow n = 0.5$$

سیالات غیر نیوتنی به شدت جریان حجمی و قطر لوله حساس تر اند.

ضریب اصطکاک: تنش برشی دیواره به انرژی جنبشی سیال بر واحد حجم

انرژی جنبشی واحد حجم $= \dfrac{\frac{1}{2}mV^2}{\text{حجم}}$ (۲) $, f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V^2}$ (۳) $, \tau_w = \left(-\dfrac{\Delta P}{L}\right)\left(\dfrac{D}{4}\right)$ (۴)

$\tau_w = \dfrac{1}{2}\rho V^2 f$ (۵) $, -\dfrac{\Delta P}{L} = \dfrac{2f\rho V^2}{D}$ (۶) , $V = \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)\left(-\dfrac{\Delta PR}{2Lk}\right)^{\frac{1}{n}} R$ (۷)

رابطه ۶ را در رابطه ۷ جایگذاری می کنیم:

$$V = \left(\frac{n}{3n+1}\right)\left(\frac{D}{4K}\frac{2f\rho V^2}{D}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{D}{2}\right)$$

$$f = \frac{16}{Re_{PL}}$$

$$Re_{PL} = \frac{\rho V^{2-n} D^n}{8^{n-1}\, k \left(\frac{2n+1}{4n}\right)^n}$$

✓ **رابطه عدد رینولدز به عنوان معیاری برای تعیین آشفتگی یا آرام بودن سیال درون لوله مدور**

مسئله:

یک محلول پلیمری با دانسیته $1075\ \frac{kg}{m^3}$ با شدت جریان جرمی $2500\ \frac{kg}{hour}$ در یک لوله به قطر داخلی $25mm$ پمپ می شود. جریان آرام بوده و ثابت پاورلا برای این محلول $k = 3\ Pa\ s^n$ و $n = 0.5$ می باشد.

مطلوب است محاسبه افت فشار و سرعت max روی محور مرکزی؟ لوله ای به طول $10m$ آگر قطر لوله به $37mm$ تغییر کند، افت فشار چه تغییری می کند؟

معیار های دیگری برای آرام و آشفته بودن سیالات مستقل از زمان نیز ارائه شده است و برای سیالات مستقل از زمان عدد رینولدز بحرانی وابسته به نوع سیال و درجه غیر نیوتنی بودن رفتار در جریان است.

اشخاصی به نام Ryan & Jahson عدد زیر را به عنوان معیار به صورت تجربی به دست آوردند:

$$Re_{MR} = \frac{6464n}{(3n+1)^2}(2+n)^{\frac{2n}{1+n}}$$

همچنین اشخاصی به نام های Mishra & Tripathi عدد زیر را به عنوان معیار به دست آوردند:

$$Re_{MR} = \frac{2 \times 100(4n+2)(5n+3)}{3(3n+1)^2}$$

در هر دو این معادلات برای سیال نیوتنی Re =2100 در نظر می گیرند.

مسئله:

اگر ضریب اصطکاک برابر با $\frac{\text{تنش برشی دیواره}}{\text{انرژی جنبشی سیال در واحد حجم}}$ باشد و از طرف دیگربرابر با $\frac{16}{Re}$ باشد. معادله عدد رینولدز تعمیم یافته را به دست آورید.

برای جریان یک سیال غیر نیوتنی در درون لوله کاپیلاری با شعاع 0.127cm جریان آشفته یا آرام است؟

$$\tau_w = 6880\ \frac{dyne}{cm^2} \qquad , \dot{m} = 27.5\ \frac{gr}{min} \qquad , \rho = 0.90\ \frac{gr}{cm^3}$$

❖ تکالیف

به صورت فایل PDF تحت عنوان پیوست ۲ در اختیارتان قرار داده می شود.