دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مکانیک سیالات

استاد: دکتر علی زادهوش

زمستان ۹۹

فصل سوم: نیروی هیدرواستاتیک و مرکز فشار (اجسام غوطه ور و شناور)

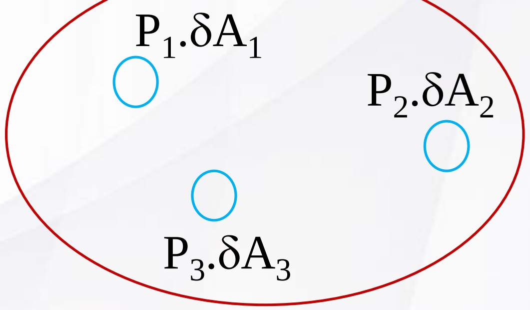
سطوح به صورت مسطح و غیر مسطح وجود دارند که دارای فشار یکسان یا متغییر هستند. می خواهیم براینده نیروهای وارد ناشی از فشار را محاسبه و نقطه اثر آنها را بدست آوریم.

✓۱اثر فشار سیال بر روی یک سطح:

فشار عبارت است از مولفه قائم نیرو تقسیم بر سطحی که نیرو بر آن وارد می شود.

$$P = \frac{\delta F_N}{\delta A}$$

اگر یک سطح مسطح داشته باشیم و از مولفه های خیلی کوچک تشکیل شده باشد. در این حالت نیروی براینده وارد بر سطح برابر است با مجموع نیروهای وارد بر تمام عناصر کوچک سطح، داریم:



$$\boxed{F = \sum P.\delta A \quad \text{or} \quad F = \int P.dA}$$

اگر نیروهایی که بر سطح مسطح وارد می شوند، عمود باشند مرکز اثر آنها مرکز سطح است.

چون نیروها روی سطح مسطح رفتار یکسان دارند.

چنانچه سطحی منحنی داشته باشیم، مقدار نیروی کل از یک سطح مسطح کمتر است و به صورت برداری جمع می شود در حالت افراطی برایند نیروها صفر است، مانند آب درون یک سطل و به صورت کلی:

$$\boxed{F = \int_s P.dA}$$

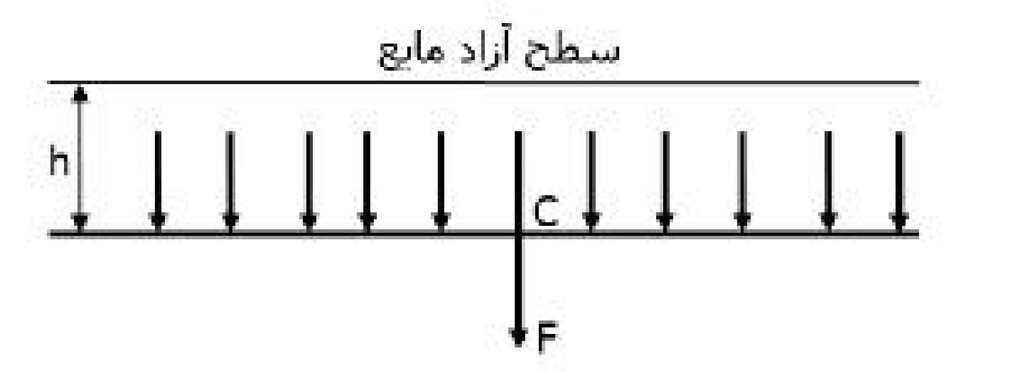
که معادله کلی برای محاسبه نیروی فشار بر سطوح مختلف می باشد.

✓ **برایند نیرو و مرکز فشار بر روی سطح مسطح-فشار یکنواخت:**

چون فشار هیدرواستاتیک بر روی هر سطح افقی مقداری ثابت است، داریم:

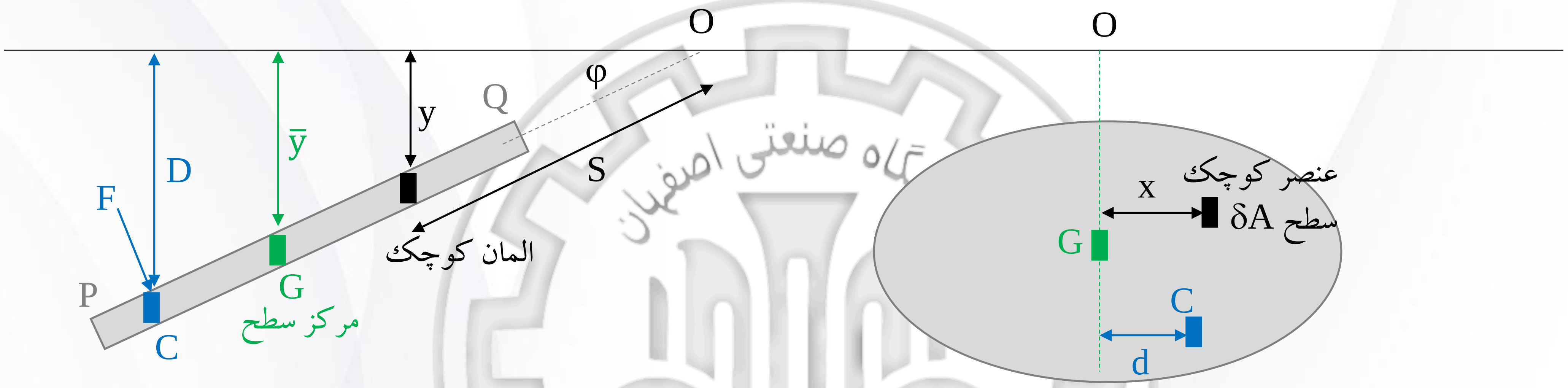
$$\boxed{F = \int_s P.dA = P \int_s dA = P.A}$$

A مساحت سطح افقی است و در این حالت نقطه اثر نیرو مرکز سطح است، زیرا نیروها با هم موازی هستند و عمود بر سطح افق قرار می گیرند.



✓ برایند نیرو و مرکز فشار بر روی سطح مسطح-فشار متغییر:

برای این حالت یک سطح مسطح در نظر می گیریم که به صورت شیب دار وارد یک سیال می شود:



سطح مسطح PQ که دارای مساحت کل A است را در نظر بگیرید، سطح در یک مایع با دانسیته ρ فرو رفته است. همان طور که در شکل نشان داده شده، سطح دارای زاویه φ با سطح آزاد مایع است. روی این سطح یک المان کوچک مانند δA را در نظر می گیریم که فاصله آن تا سطح آزاد مایع y باشد. مرکز سطح با نقطه G مشخص شده و فاصله آن تا سطح آزاد مایع $\bar{y}$ است. می خواهیم نقطه اثر نیروی ناشی از فشار متغییر در نقطه C که پایین تر از مرکز قرار گرفته و فاصله ان تا سطح آزاد مایع D است، مشخص کنیم.

توجه داریم که فشار از راست به چپ بیشتر می شود. پس مرکز اثر فشار به سمت چپ جسم می رود.

فشار بر روی المان : $P = \rho g y \qquad (1)$

نیروی وارد بر المان کوچک : $F = P\delta A \overset{(1)}{\Longrightarrow} F = \rho g y \delta A \qquad (2)$

براېند نیرو : $\sum \rho g y \delta A$

سیال مایع و تراکم ناپذیر است یعنی دانسیته ثابت است، پس داریم:

$$F = \rho g \sum y \delta A$$

$\sum y\delta A$: ممان اول سطح PQ نسبت به سطح آزاد مایع است که برابر است با فاصله مرکز سطح تا سطح آزاد مایع $(\bar{y}) \times$ مساحت کل سطح (A)

$$\sum y\delta A = A\bar{y} \qquad , \qquad \boxed{F = \rho g A \bar{y}}$$

به منظور پیدا کردن نقطه اثر C باید D را مشخص کنیم:

ممان F نسبت به نقطه O برابر مجموع ممان تمام نیروها بر روی تمام عناصر کوچک سطح δA نسبت به O است.

$$y = \sin\varphi . S$$

$(2) \Rightarrow$ نیرو بر روی المان کوچک $= \rho g y \delta A = \rho g S . \sin\varphi . \delta A$

O مماس نسبت به نقطه : $\rho gS.\sin\varphi.\delta A \times S = \rho g.\sin\varphi.\delta A \times S^2$

اگر در اینجا ρ و g و φ را ثابت در نظر بگیریم، داریم:

O مجموع ممان های عناصر سطح نسبت به : $\rho g.\sin\varphi.\sum S^2\delta A$

O ممان F نسبت به : $\rho gA\bar{y} \times OC = \rho gA\bar{y} \times (\frac{D}{\sin\varphi})$

$$\rho gA\bar{y} \times (\frac{D}{\sin\varphi}) = \rho g.\sin\varphi.\sum S^2\delta A \Rightarrow D = \sin^2\varphi\ (\frac{\sum s^2\delta A}{A\bar{y}})$$

$\sum S^2\delta A$ ممان دوم سطح نسبت به نقطه O

ممان اول سطح : $\sum y\delta A$ = مجموع عنصرهای سطح × فاصله تا سطح ممان گیری = $A\times\bar{y}$

سطح × مرکز سطح تا محور فاصله ممان گیری =

ممان دوم سطح : $\sum S^2\delta A$ = مجموع عناصر سطح × شعاع چرخش حول محور مورد نظر = $I_0 = Ak_0{}^2$

k_0: شعاع چرخش سطح نسبت به نقطه O

$$I_0 = I_G + A\,(\frac{\bar{y}}{\sin\varphi})^2$$

I_0 : ممان دوم سطح نسبت به نقطه O

I_G : ممان دوم سطح نسبت به مرکز سطح

$(\frac{\bar{y}}{\sin\varphi})$: شعاع چرخش مرکز سطح نسبت به نقطه O

A : مساحت سطح

$$Ak_0^2 = Ak_G^2 + A(\frac{\bar{y}}{\sin\varphi})^2$$

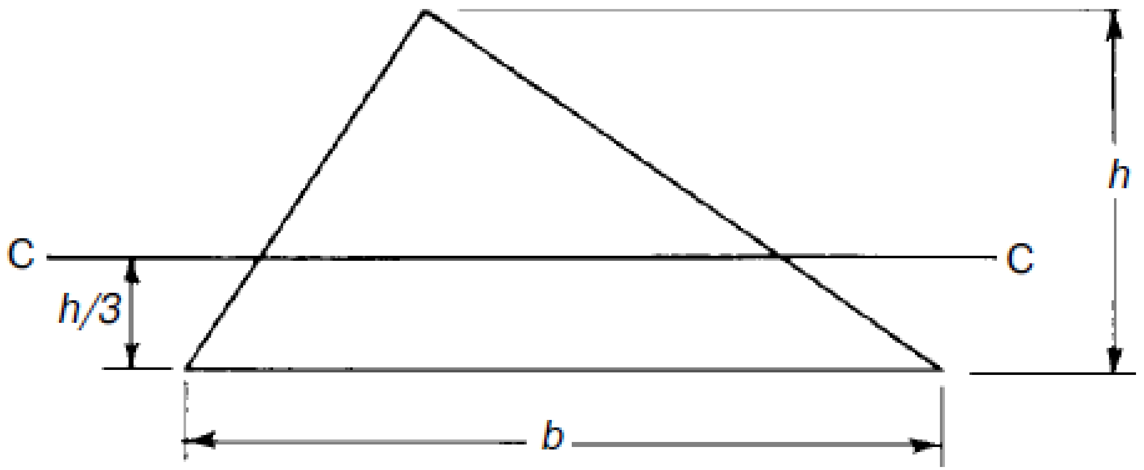
$$(1) \quad \Rightarrow D = \sin^2\varphi \left(\frac{k_G^2 + \frac{\bar{y}^2}{\sin^2\varphi}}{\bar{y}}\right) \Rightarrow D = \sin^2\varphi \left(\frac{\frac{\sin^2\varphi . k_G^2 + \bar{y}^2}{\sin^2\varphi}}{\bar{y}}\right) = \frac{\sin^2\varphi . k_G^2 + \bar{y}^2}{\bar{y}} = \sin^2\varphi \left(\frac{k_G^2}{\bar{y}}\right) + \bar{y} \Rightarrow$$

$$D = \sin^2\varphi \left(\frac{A.k_G^2}{A.\bar{y}}\right) + \bar{y} \Rightarrow \boxed{D = \sin^2\varphi \left(\frac{I_G}{A.\bar{y}}\right) + \bar{y}}$$

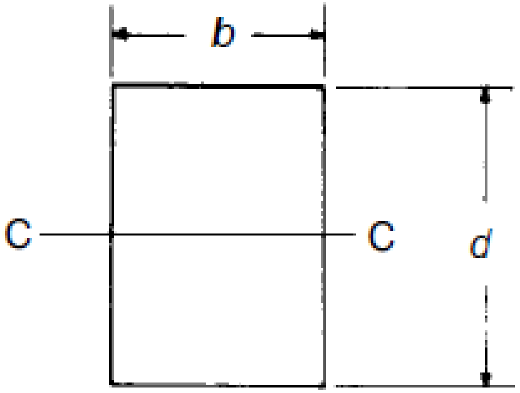
I_G : ممان دوم سطح نسبت به مرکز سطح

نکته: همیشه محل اثر نیرو زیر مرکز سطح قرار گرفته است.

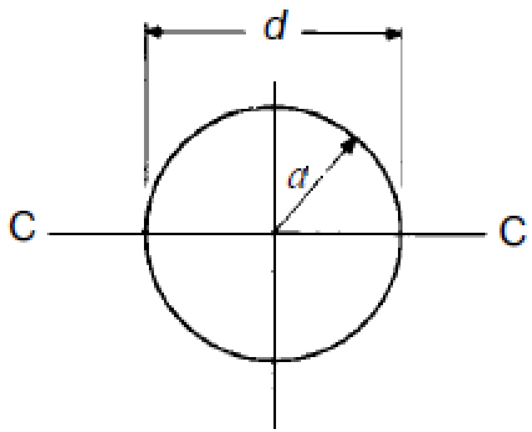
در اسلاید بعدی روش محاسبه I_G برای بعضی از شکل ها نشان داده شده است.



$$(Ak^2)_{cc} = bh^3 / 36$$



$$(Ak^2)_{cc} = bd^3 / 12$$



$$(Ak^2)_{cc} = \pi a^4 / 4 = \pi d^4 / 64$$

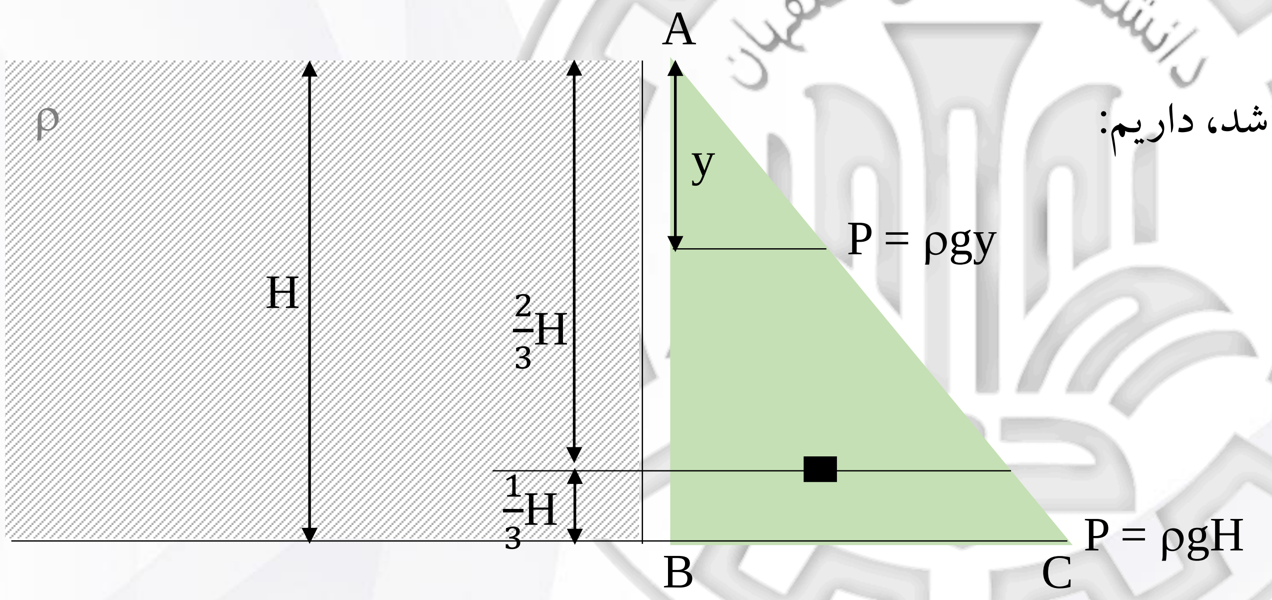
موقعیت جانبی:

مجموع ممان های نیروهای وارد بر روی عناصر کوچک حول OG برابر با : $F \times d$ است:

$F\times d =$ OG مجموع ممان های نیروها بر روی عناصر سطح کوچک حول $= \sum \rho g y \delta A\, .\, x \Rightarrow d = \dfrac{\sum \rho g y \delta A.\, x}{F} = \dfrac{\rho g \sum y \delta A.\, x}{\rho g A \bar{y}} = \dfrac{\sum y \delta A.\, x}{A \bar{y}}$

✓ **منشور فشار:**

فرض می کنیم یک ظرف حاوی مایعی مثل آب باشد، داریم:



از روی مساحت منشور می توان مقدار برایند نیرو و مرکز اثر آن که مرکز اثر فشار است را به صورت ترسیمی بدست آورد.

تعریف منشور فشار: هرگاه رابطه ای خطی میان عمق و فشار وجود داشته باشد می توانیم از طریق ترسیمی برایند نیرو و مرکز آن را بدست آوریم. (عرض منشور واحد در نظر گرفته می شود)

مساحت نمودار : $\frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times H \times \rho g H$

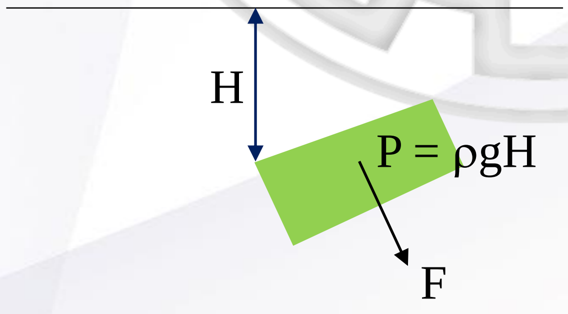
برایند نیرو برای عرض واحد : $\boxed{F = \frac{\rho g H^2}{2}}$

مرکز F : $\frac{2}{3} H$ (مرکز سطح)

$$F = \rho g A \bar{y} = \rho g \, (H \times 1) \times \frac{H}{2} = \frac{\rho g H^2}{2}$$

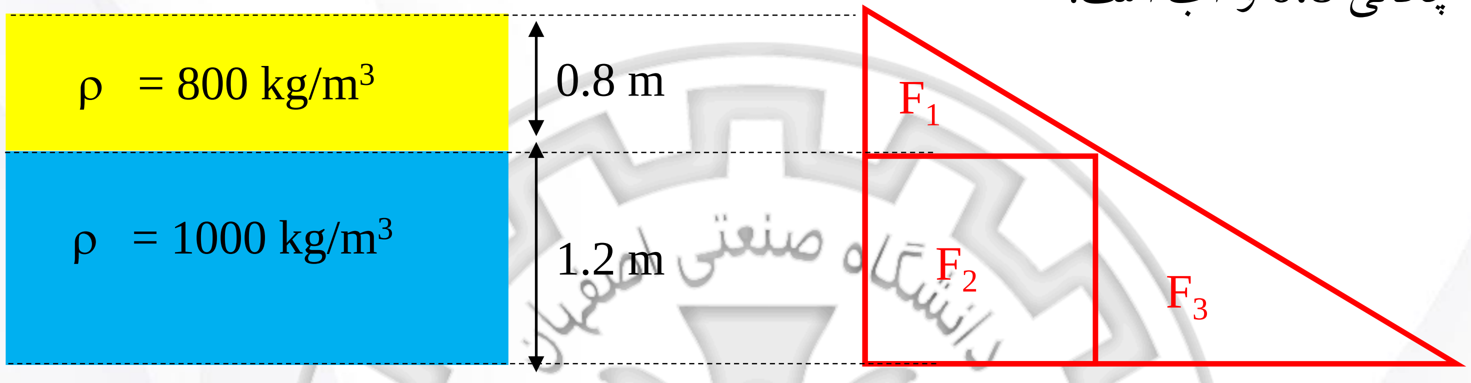
$$D = \sin^2\varphi \, (\frac{k_G^2}{\bar{y}}) + \bar{y} \, , \; k_G^2 = \frac{H^2}{12} \, , \; \bar{y} = \frac{H}{2} \, , \; \varphi = 90 \Rightarrow \sin\varphi = 1 \Rightarrow \boxed{D = \frac{2}{3} H}$$

بعنوان مثال برای سطح مسطح دیگر می توانیم بنویسیم:



مثال: مطابق شکل نشان داده شده، مطلوب است محاسبه موقعیت و مقدار براینده نیرو بر روی تانکی که شامل روغن با چگالی 0.8 و آب است.

حل:



$$DF = F_1D_1 + F_2D_2 + F_3D_3$$

$$F_1 = \frac{\rho g H^2}{2} \times \text{(واحد) طول} = \frac{800\times 9.81\times 0.8^2}{2} \times 1 = 2511.36\ N\ , \qquad D_1 = \frac{2}{3}\times 0.8 = 0.53$$

$$F_2 = \rho g H \times \text{طول} = 800 \times 9.81 \times 0.8 \times 1.2 = 7534.08\ N\ , \qquad D_2 = \frac{1.2}{2} + 0.8 = 1.4$$

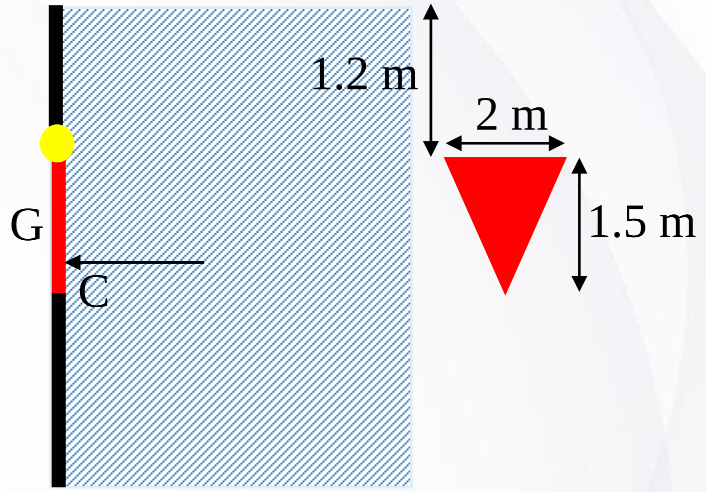
$$F_3 = \frac{1000\times 9.81\times 1.2^2}{2} = 7063.2\ N\ , \qquad D_3 = 1.2 \times \frac{2}{3} + 0.8 = 1.6$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 17108.56\ \ N$$

$$DF = F_1D_1 + F_2D_2 + F_3D_3 = 1.36\ \ m$$

مثال: یک تانک آب دارای یک دریچه مثلثی شکل است که از بالا به دیوار لولا گردیده است.

مطلوب است محاسبه ممان لولا که بتواند درب را بسته نگه دارد. $g = 9.81$ و $\rho = 1000\ kg/m^3$



حل:

نقطه G مرکز سطح است و نقطه C مرکز اثر فشار است.

$$F = \rho g A \bar{y}$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 1.5 = 1.5\ m^2 \quad , \quad \bar{y} = 1.2 + \frac{1}{3} \times 1.5 = 1.7\ m$$

$$F = 1000 \times 9.81 \times 1.5 \times 1.7 = 25015.5\ N$$

$$D = \sin^2\varphi \left(\frac{I_G}{A.\bar{y}}\right) + \bar{y} = \frac{0.1875}{1.5 \times 1.7} + 1.7 = 1.773\ m$$

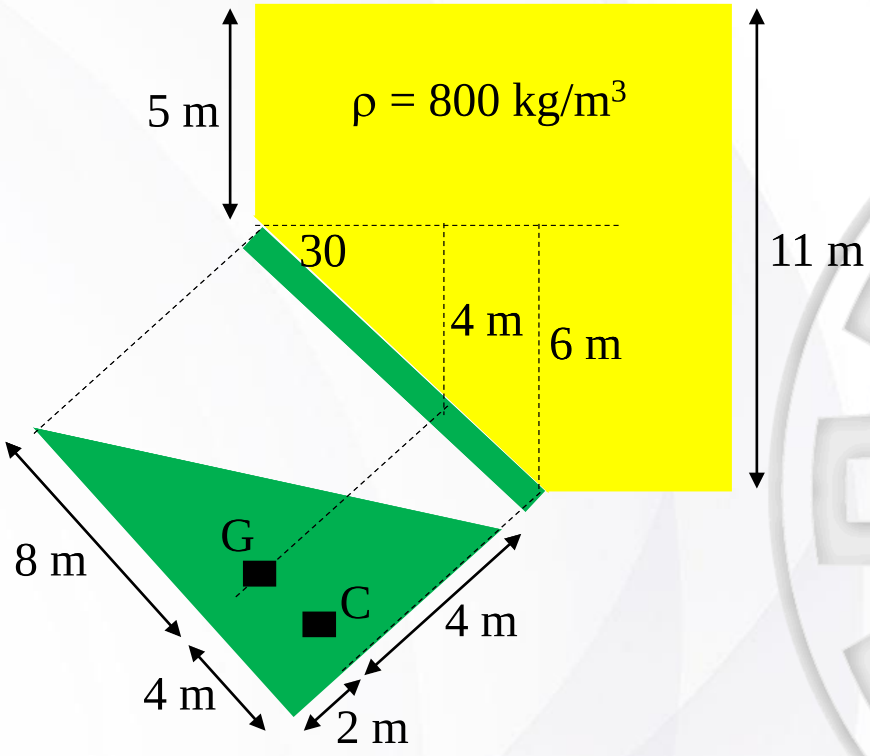
$I_G = \frac{2 \times 1.5}{36} = 0.1875$, ممان لولا : $F \times (D - 1.2) = 14258.835\ N.m$

مثال: دریچه یک مخزن روغن به صورت مثلث قائم الزاویه است. مطلوبست:

الف) نیروی هیدرواستاتیکی موثر بر دریچه

ب) محل مرکز فشار

حل:



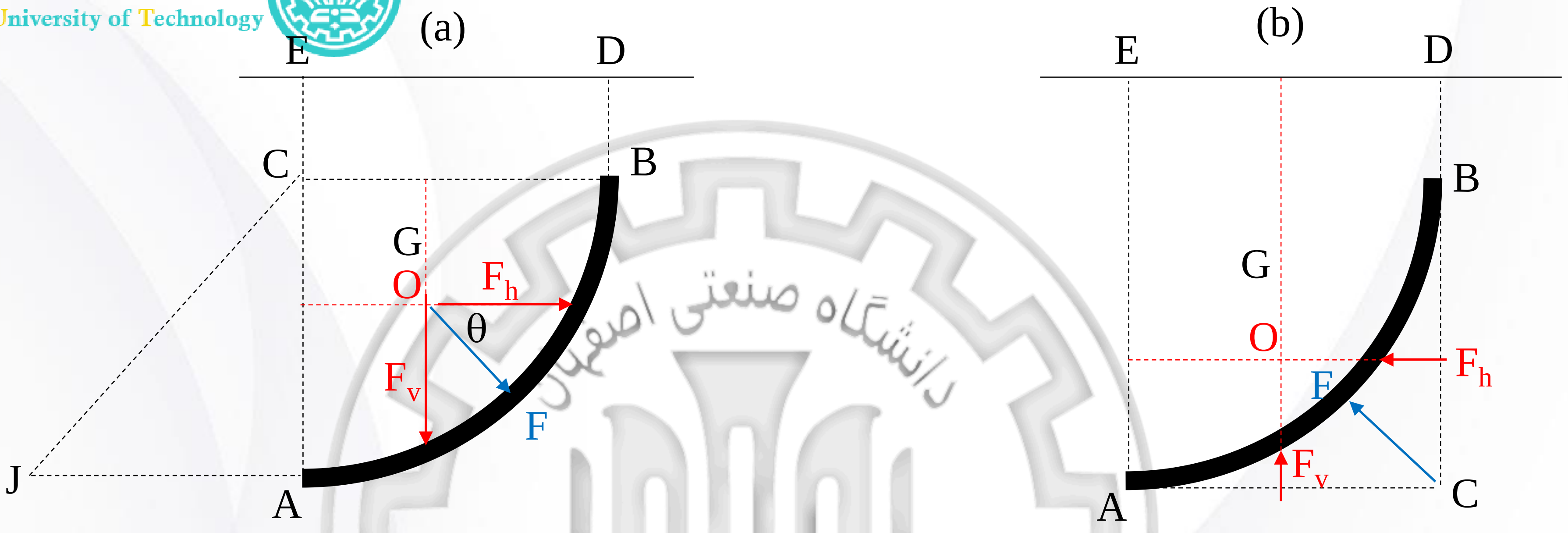
$$F = \rho g A\bar{y} = 800 \times 9.81 \times \left(\frac{12\times 6}{2}\right) \times 9 = 2542.752 \ \text{kN}$$

$$I_G = \frac{b\,d^3}{36} = \frac{6\times 12^3}{36} = 288$$

$$D = \sin^2\varphi\left(\frac{I_G}{A.\bar{y}}\right) + \bar{y} = (0.5)^2 \times \frac{288}{36\times 9} + 9 = 9.222 \text{ m}$$

✓ **برایند نیرو و مرکز فشار بر روی سطح منحنی:**

اگر سطح منحنی باشد، نیروهای وارد از طرف سیال بر عناصر کوچك تشکیل دهنده سطح موازی نخواهند بود و باید آنها را به طور برداری جمع کرد. یك راه مناسب این است که مولفه های عمودی و افقی برایند نیرو و نقطه اثر آن را بدست آوریم.



در شکل نشان داده شده در بالا سطح خمیده AB در سیال غوطه ور است. در حالت (a) سیال روی سطح و در حالت (b) سیال زیر سطح است. F نیروی وارد بر سطح از طرف سیال و F_h مولفه افقی نیرو و F_v مولفه عمودی نیرو می باشند. در شکل (a) سطح عمودی AC تصویر سطح منحنی AB است. زیرا عنصر ACB در حالت تعادل است. بنابراین برایند نیروی وارد بر سطح AC برابر مولفه افقی F_h می باشد که بر سطح AB بوجود آمده است. بنابراین می توان گفت مولفه افقی سطح AB همان F_h است که بر روی AC می باشد، زیرا عنصر ACB در حالت تعادل است. یک سطح به صورت JAC در نظر می گیریم که منشور فشار است و $F = \frac{\rho g H^2}{2}$ و $D = \frac{2}{3}H$ می باشد که H همان AC است. نقطه اثر آنها در یک راستا می باشد و از مرکز تصویر AC می گذرد. همچنین می توان برای شکل (b) این بحث را انجام داد و F_h را بدست آورد.

از طریق محاسبه نیز می توان مقدار F_h و D را محاسبه کرد، بنابراین :

$$F_h = \rho g A\bar{y} \; , \; D = \sin^2\varphi \left(\frac{I_G}{A.\bar{y}}\right) + \bar{y}$$

در شکل (a) حالت مولفه عمودی را در نظر می گیریم که با F_v نشان می دهیم که عبارت است از وزن تمام مایع ABDE که بر روی سطح AB قرار دارد. چون سیال در حالت سکون است، نیروی عمودی و برشی دیگری وجود ندارد.

بنابراین داریم:

$F_v =$ ABDE وزن حجم مایع

که به طرف پائین است و از مرکز ثقل مایع می گذرد که با G نشان داده شده است.

در شکل (b) برای یک لحظه سطح AB را حذف می کنیم و فضای ABD را با مایع پر می کنیم. این مایع تحت اثر وزن خود نیروی عمودی بر سطح AB وارد می کند. بنابراین می توان نوشت:

$F_v =$ وزن حجم مایع مجازی که بر روی سطح تصور کرده ایم و از مرکز ثقل مایع می گذرد.

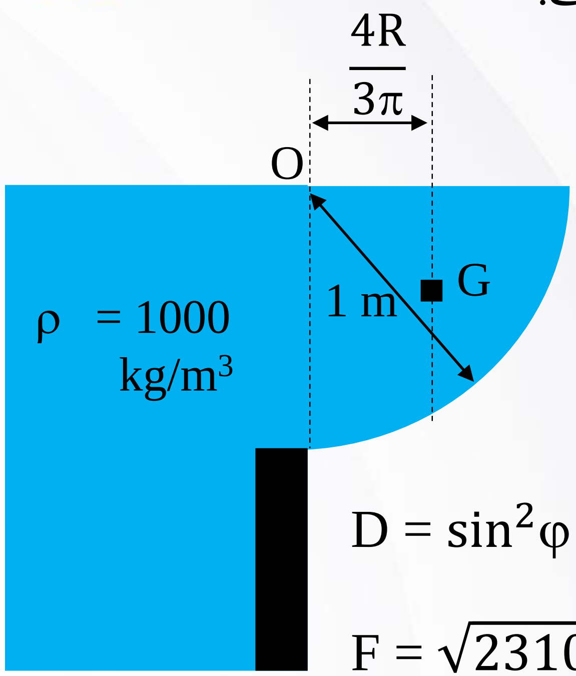
پس نتیجه می گیریم:

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{F_v}{F_h}$$

نقطه اثر آن نیرو:

مثال: مقدار و جهت برایند نیروی وارد بر دریچه قطاعی را با مشخص کردن مولفه های افقی و عمودی و نقطه اثر آنها را نشان دهید. شعاع دریچه 1 m و پهنای آن 3 m است و آب پشت دریچه قرار گرفته است.

حل:



$$F_v = mg = \rho Vg = \rho hAg = \frac{\pi\times 1^2}{4}\times 3\times 1000\times 9.81 = 23100\ N$$

$$OG = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4\times 1}{3\pi} = 0.424\ m$$

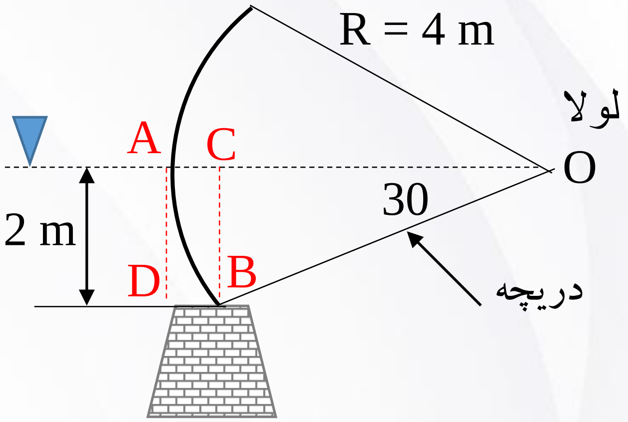
$$F_h = \rho g A\bar{y} = 1000\times 9.81\times 3\times 1\times 0.5 = 14715\ N$$

$$D = \sin^2\varphi\left(\frac{I_G}{A.\bar{y}}\right) + \bar{y} = 1\times\frac{0.25}{3\times 0.5} + 0.5 = 0.67\ m\ ,\ I_G = \frac{3\times 1^3}{12} = 0.251$$

$$F = \sqrt{23100^2 + 14715^2} = 27389\ N\ ,\ \tan\theta = \frac{23100}{14715} = 1.56 \Rightarrow \theta = 57.5^\circ$$

مثال: دریچه نشان داده شده در شکل جهت نگهداری آب استفاده می شود. مولفه های افقی و عمودی وارد از طرف سیال بر واحد عرض گیت، نیروی برایند و نقطه اثر آنها را بدست آورید؟

حل:



$$F_h = \rho g A\bar{y} = \rho g(AD\times 1)\bar{y} = 1000 \times 9.81 \times 2 \times 1 \times 1 = 19620 \ \ N$$

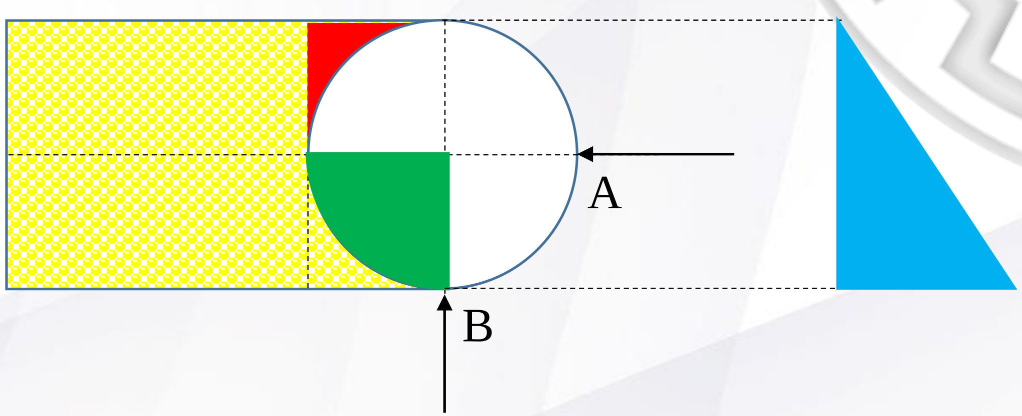
$$V_{ABC} = V_{ABOA} - V_{OBC} = (\frac{\pi}{12} \times 4^2 \times 1) - (\frac{1}{2}\times 4 \times \cos 30 \times 2 \times 1) = 0.7246 \ m^3$$

$$F_v = \rho g V_{ABC} = 1000 \times 9.81 \times 0.7246 = 7109.2 \ N$$

$$F = 20868.3 \ N \ , \ \tan\theta = \frac{7109.2}{19620} \Rightarrow \theta = 19.91°$$

مثال: یک سیلندر به طول 1.5 m و شعاع 1 m مطابق شکل درون یک روغن با چگالی مخصوص 0.8 قرار گرفته است. اگر جرم سیلندر 2250 kg باشد. مطلوب است محاسبه واکنش در نقطه A و واکنش در نقطه B به عبارت دیگر، نیروی های افقی، عمودی، برایند نیرو و زاویه ای که با افق تشکیل می دهد.

حل:



$$F_A = \rho g A\bar{y} = 800 \times 9.81 \times 2 \times 1.5 \times \frac{1}{2} \times 2 = 23544 \ \ N$$

ترسیمی : $F = \frac{\rho g H^2}{2} \times$ طول

مساحت قسمت قرمز رنگ برابر است با :

$$A = (1 \times 1) - \frac{\pi \times r^4}{4} = 1 - 0.785 = 0.215 \ \ m^2$$

حجم قسمت قرمز رنگ برابر است با:

$$V = 0.215 \times 1.5 = 0.3225 \ \ m^3$$

$$F_1 = 0.3225 \times 9.81 \times 800 = 2530 \ \ N$$

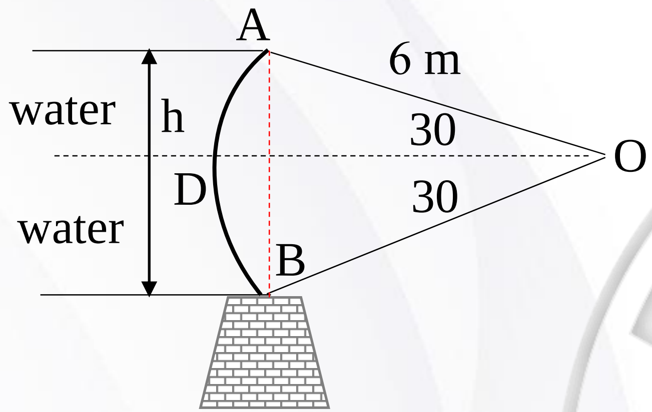
$$F_2 = 1.785 \times 1.5 \times 800 \times 9.81 = 21017.7 \ \ N$$

$$w = mg = 2250 \times 9.81 = 22072.5 \ \ N$$

$$F_B = F_1 + w - F_2 = 3589.5 \ \ N$$

$$F = \sqrt{F_A^2 + F_B^2} = 23816.05 \ \ N \ \ , \ \ \tan\theta = \frac{3589.5}{23544} = 0.152 \Rightarrow \theta = 8.67°$$

مثال: یک دریچه آبگیر به شکل یک کمان با شعاع 6 m مطابق شکل برای کنترل آب مورد استفاده قرار می گیرد. مقدار برایند نیرو و جهت آن را تعیین کنید. (طول را واحد در نظر بگیرید.)



$$\sin 30 = \frac{\frac{h}{2}}{6} \Rightarrow h = 6\ \text{m}$$

$$F_h = \rho g A\bar{y} = 176.58 \times 10^3\ \text{N}$$

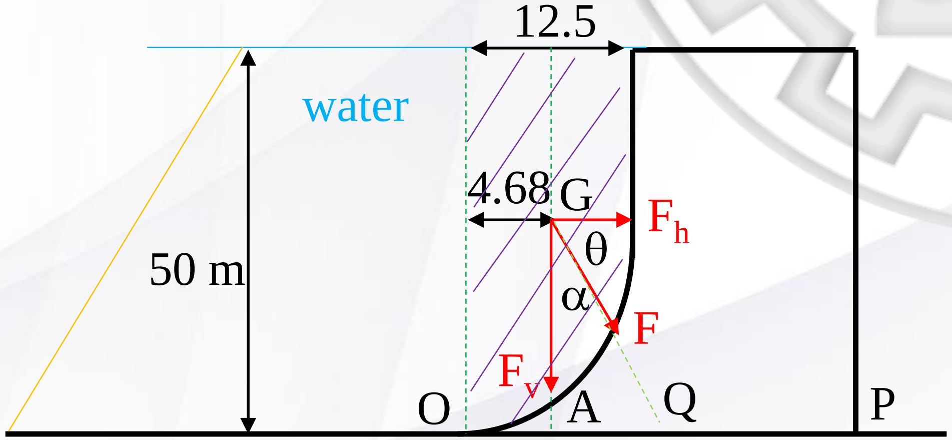
$$A_{ADB} = A_{ADBO} - A_{ABO} = \left(\frac{1}{6} \times \pi r^2\right) - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 0.9\right) = 18.84\ \text{m}^2$$

$$V_{ADB} = 18.84 \times 1 = 18.84\ \text{m}^3$$

$$F_v = 18.84 \times 1000 \times 9.81 = 184820.4\ \text{N}$$

$$F = 255615.09\ \text{N},\ \tan\theta = \frac{184820.4}{176580} = 1.047 \Rightarrow \theta = 46.31^\circ$$

مثال: شکل زیر مقطع یک سطح را که دارای سطح سهمی شکل است نشان می دهد. راس سهمی در نقطه O بوده و فاصله محوری عمودی که از این نقطه می گذرد در سطح آب با سهمی 12.5 m می باشد. مطلوبست محاسبه مقدار و جهت برایند نیروهای وارده از طرف آب به سطح با مشخص کردن مولفه های عمودی و افقی و نقطه اثر آنها. همچنین تعیین فاصله نقطه O و محل برخورد برایند نیروها با خط افقی OP. مرکز ثقل نیم سهمی از محور قائم سهمی برابر با 4.68 m می باشد.



حل:

$F_h = \rho g A\bar{y} = 1000 \times 9.81 \times 50 \times 25 = 12262500\ \ N\ \ , D = \frac{1}{3} \times 50 = 16.69\ \ m$

$A = 50 \times 1 = 50\ m^2$ (طول واحد است), $\bar{y} = 25\ m$

سطح مقطع هاشور زده : $\frac{2}{3} \times 50 \times 12.5 = 416.7\ \ m^2$

$F_v = \rho g V = 1000 \times 9.81 \times 416.7 \times 1 = 4087827\ \ N$

$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 12911235.46\ \ N$

$\tan\theta = \frac{4087827}{12262500} = 0.334 \Rightarrow \theta = 18.4°$

$\alpha = 90 - \theta = 90 - 18.4 = 71.58°$

$\tan\alpha = \frac{AQ}{\frac{1}{3}h} \Rightarrow AQ = \frac{1}{3}\,h.\tan\alpha$

$OQ = OA + AQ = 4.68 + \frac{1}{3} \times 50 \times \tan 71.58 = 54.72\ m$

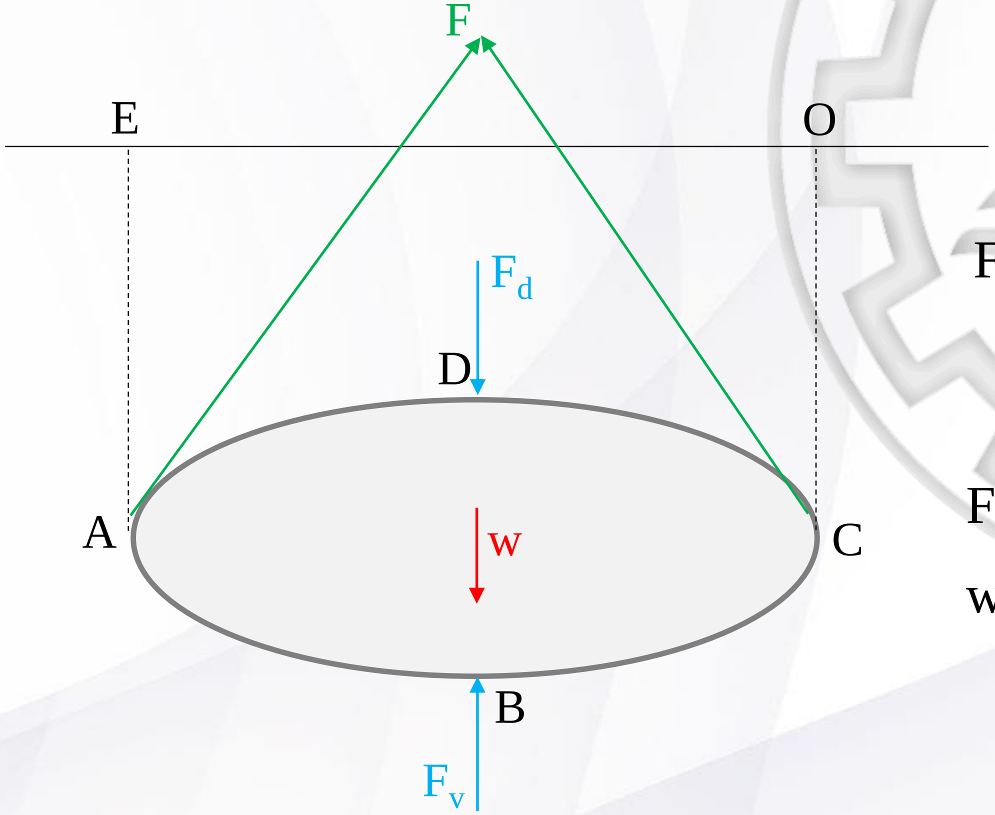
✓نیروی سبک کننده در اجسام شناور و غوطه ور(مستغرق):

برای این نیرو واژه های دیگری مانند نیروی استغراق، رانش، بویانت (Buoyant)، سبک کننده و .. به کار می رود. به طور کلی قوانین مربوط به اجسام شناور از اصل ارشمیدس ناشی می شود که آن را می توان به صورت های زیر تعریف کرد:

۱) هر جسم شناور یا غوطه ور در یک سیال به اندازه وزن حجمی از مایع که جابه جا شده است، سبک می شود.

۲) هر جسم شناور حجمی از سیالی را که در آن شناور است جابه جا می کند، به طوری که وزن جسم با وزن سیال جابه جا شده، برابر است.

برای این منظور مطابق شکل، جسم ABCD در داخل یک مایع با وزن مخصوص را در نظر بگیرید.



به دلیل تعادل جسم، نیروهای وارد بر آن را روی محور عمودی تصویر می کنیم.

چون جسم ایستا است، نیروی برشی و در نتیجه نیروی افقی نداریم.

$$F_T = F + F_v - F_d - w = 0 \Rightarrow F + F_v = F_d + w$$

از طرفی نیروی سبک کننده با F_B نشان داده می شود، داریم:

$$F_B = w - F\ ,\ \ F_B = F_v - F_d$$

$$w = F + F_v - F_d$$

F_v : برایند نیروهای قائمی می باشد که روی سطح منحنی ABC وارد می شوند.

F_d : برایند نیروهای قائمی است که روی سطح ADC وارد می شوند.

w : وزن جسم در هوا

F : وزن جسم در درون سیال

$$F_v = \rho g V_{EABCO} = \gamma V_{EABCO}$$

$$F_d = \rho g V_{EADCO} = \gamma V_{EADCO}$$

$$F_B = \gamma \times \text{حجم جسم مستغرق}$$

پس یک حجم جابه جا شده داریم که مرکز آن مرکزی است که این حجم جابه جا شده از آن می گذرد و وقتی مستغرق است یعنی کل حجم جابه جا می شود ولی اگر مقداری از جسم خارج از سیال باشد، مقداری از جسم جابه جا می شود، پس برای اجسام شناور داریم:

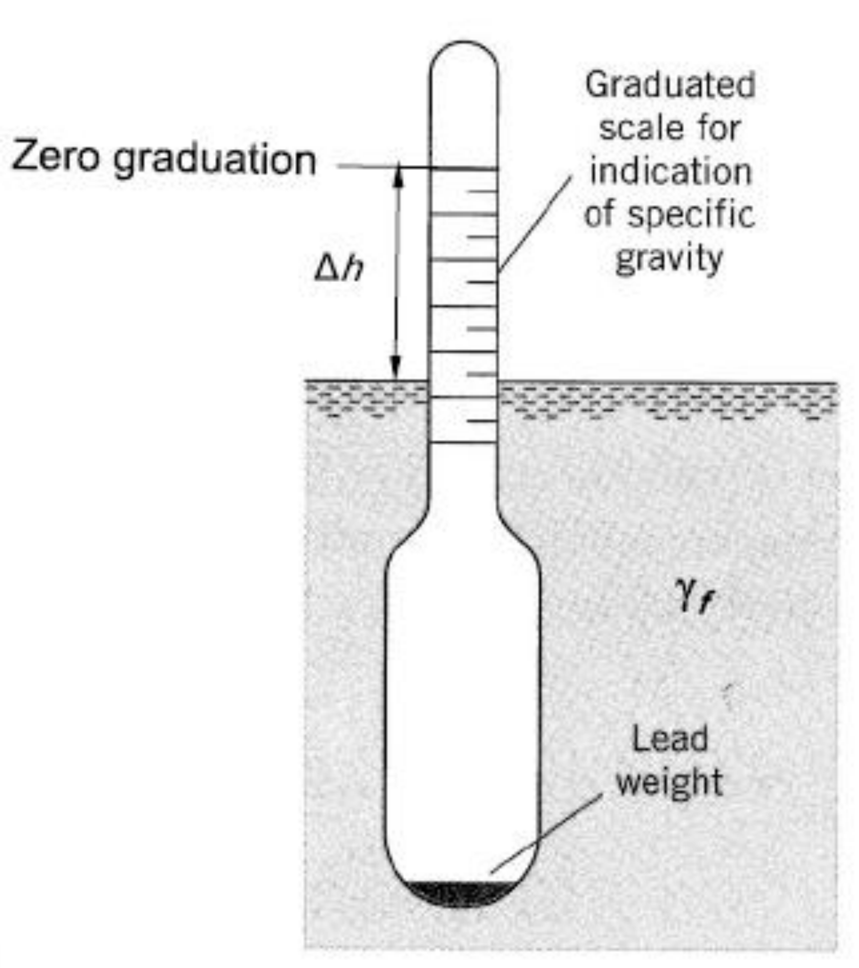
$$F_B = F_v - F_d = \gamma \times \text{حجم سیال جابه جا شده}$$

که این اصل همان اصل ارشمیدس می باشد.

✓ **هیدرومتر:**

که برای تعیین جرم مخصوص سیالات به کار می رود و از اصل ارشمیدس استفاده می کند. در صورت قراردادن مایه سنگین در هیدرومتر، وزن پیدا می کند و وقتی که در آب قرار می دهیم، شناور می شود. بنابراین مقداری از سیال جابه جا می شود که مساوی وزن آن می باشد. وزن از قبل مشخص است، حجم جابه جا شده تعیین می شود و می توان دانسیته را محاسبه کرد. هر چه سیال سنگین تر باشد، هیدرومتر کمتر فرو می رود، یعنی حجمی که جابه جا می شود متاثر از دانسیته سیال تغییر می کند.

جهت درجه بندی هیدرومتر، آن را در سیال های مختلف قرار می دهند و سپس درجه بندی می کنند.



مثال: وزن قطعه ای از یک جسم جامد در هوا و آب به ترتیب $1.5\ N$ و $1.1\ N$ می باشد.

در صورتیکه وزن مخصوص آب $9806\ N/m^3$ باشد، حجم جسم بر حسب cm^3 و وزن مخصوص جسم را محاسبه کنید.

حل:

$$F_B = W - F = \gamma \times \text{حجم سیال جابه جا شده} \Rightarrow 1.5 - 1.1 = 9806 \times V \Rightarrow V = 40.8\ cm^3$$

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{1.5}{40.8} = 0.0368\ \ N/cm^3$$

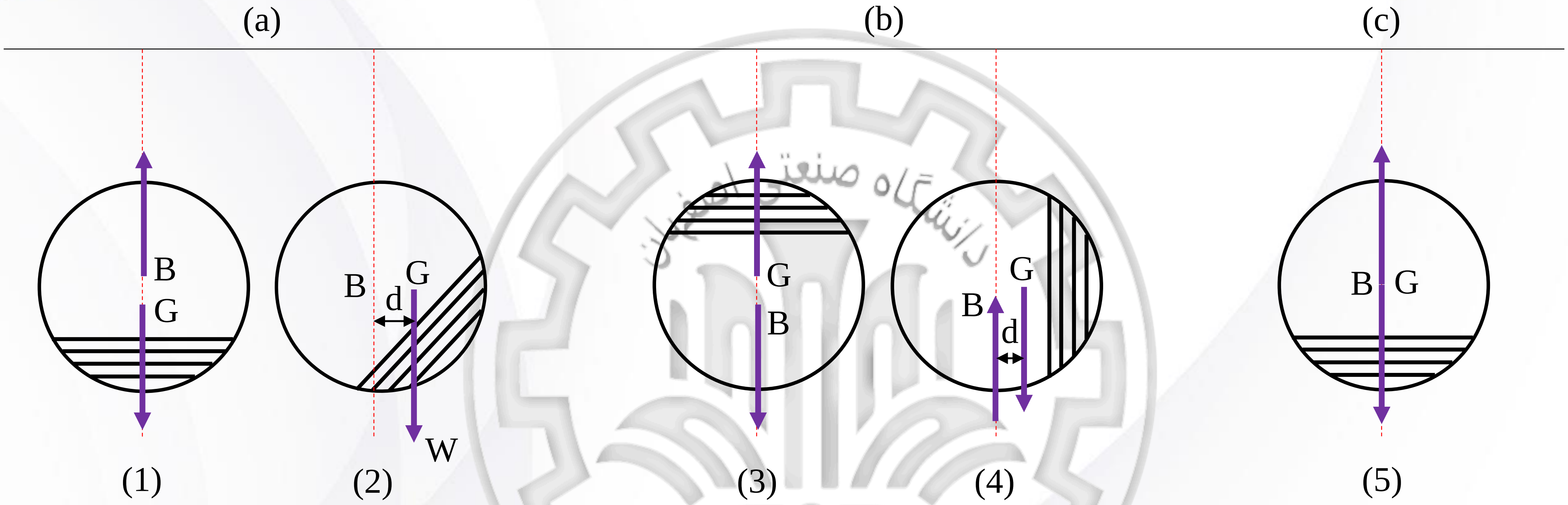
✓ تعادل اجسام غوطه ور و شناور:

اگر یک جسمی غوطه ور یا شناور باشد. تعادل به دو نقطه بستگی دارد. یکی مرکز ثقل جسم است که با G نشان می دهیم و دیگری هم مرکز نیروی رانش (بویانت) است که از مرکز سیال جابه جا شده می گذرد و با B نشان می دهیم.

$$W \rightarrow G \quad , \quad F_B \rightarrow B$$

تعادل اجسام شناور و غوطه ور بستگی به موقعیت نسبی نیروی سبک کننده و وزن جسم دارد و همان طور که از مکانیک اجسام جامد می دانیم، یک جسم در حال تعادل است که اولا مجموع کلیه نیروهای وارد بر جسم بر روی هر محور دلخواه برابر صفر شود. ثانیا مجموع گشتاور نیروها نسبت به هر نقطه مساوی صفر باشد. به عبارتی اگر به جسم گشتاوری اعمال شود، جسم به حالت اولیه باز گردد. تعادل یک جسم در صورتی پایدار است که اگر آن را تحت زاویه کوچکی چرخش دهیم، مجددا به حالت اولیه برگردد.

✓ تعادل اجسام غوطه ور:

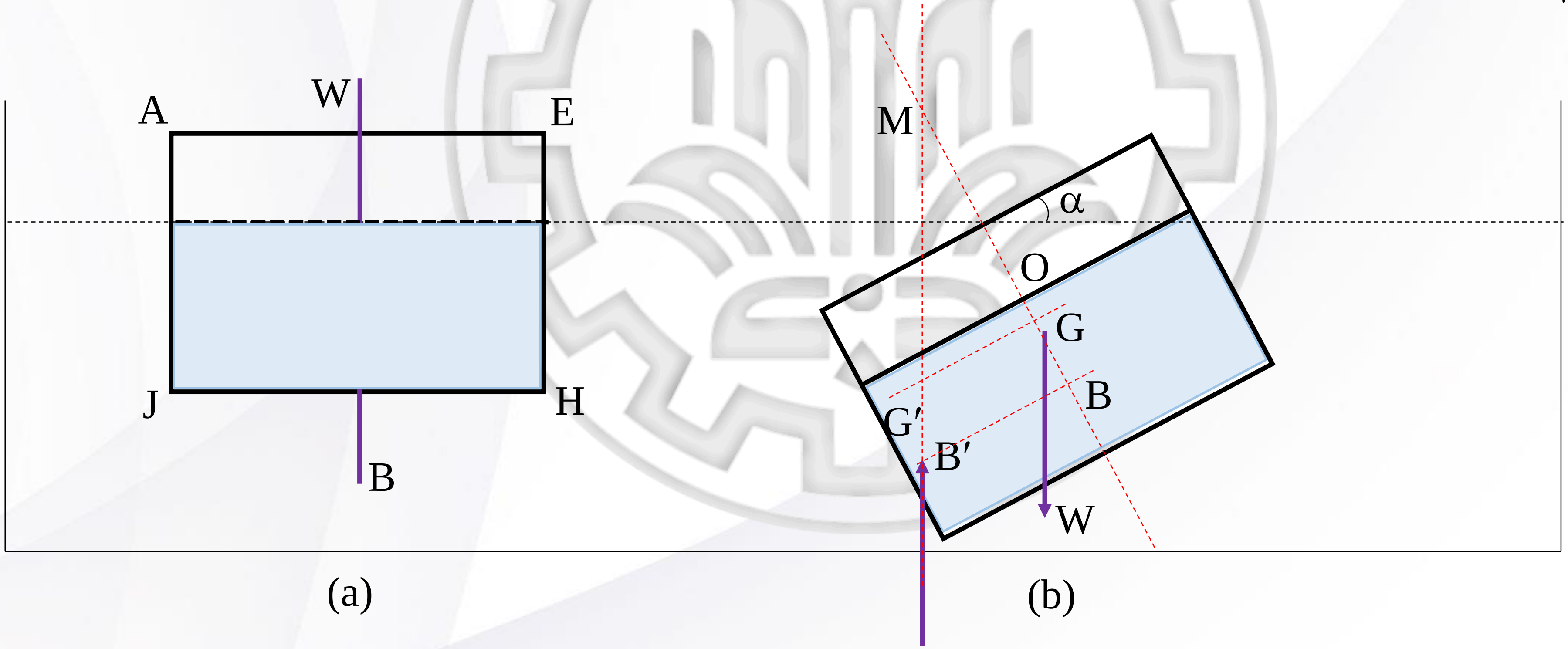


در شکل (۱)، دو مرکز در یک امتداد هستند و B بر روی G قرار گرفته است. اگر جسم را تحت یک زاویه ای چرخش دهیم و به شکل (۲) برسیم، B تغییر نمی کند ولی G تغییر می کند و در این حالت یک نیروی W×d بوجود می آید و به حالت اولیه برمی گردد. یعنی یک ممان بازگرداننده ایجاد می شود. این زوج نیرو، زوج نیروی بازگشت دهنده نامیده می شود. پس در این حالت، جسم تعادل پایدار دارد. در شکل (۳)، G روی B قرار گرفته است و در یک امتداد هستند، اگر چرخش بدهیم نقطه B ثابت می ماند و G جابه جا می شود و یک

نیروی $W \times d$ بوجود می آید که جسم را به حالت (۱) برمی گرداند و لذا حالت (۳) تعادل ناپایدار است و به این نیرو، نیروی واژگون کننده گفته می شود.

در شکل (۵)، G و B روی هم منطبق می باشند و در این حالت سیال به هر حالتی قرار داده شود، ثابت باقی می ماند و حالت خود را حفظ می کند که حالت تعادل خنثی نامیده می شود.

✓ **تعادل اجسام شناور:**



(a) (b)

وقتی که شکل (a) را می چرخانیم به شکل (b) می رسیم که G ثابت مانده و B به B' منتقل و G' تصویر G می باشد. خطی که G از آن می گذرد و خطی که B' از آن می گذرد در یک نقطه یکدیگر را قطع می کنند. یک جسم شناور حجمی از مایع را جابه جا می کند که معادل با وزن آن جسم است. یک مقطع عرضی از جسم شناور را نشان می دهیم و از موقعیت (a) به (b) می رویم.

وقتی که G بالای B قرار گرفته باشد، جسم تعادل پایدار دارد و وقتی که نقطه B منطبق روی نقطه G باشد، تعادل خنثی دارد. اکنون B زیر G را بررسی می کنیم. اگر یک جسم تحت یک زاویه کوچک قرار بگیرد ممکن است به حالت اولیه برگردد، ولی تحت زاویه های بزرگتر ممکن است واژگون شود. پس باید زاویه مشخص باشد. برای این حالات نقطه ای معرفی شده که امتداد BG و $B'G'$ می باشد که نقطه متاسنتر است و بسته به موقعیت این نقطه، فاصله بین M و G می تواند مثبت یا منفی باشد و معیاری از تعادل می باشد. بنابراین تعادل به نقطه متاسنتر بستگی دارد.

متاسنتر: برای تعادل اجسام شناور مانند کشتی که بتوانیم حالت پایدار را از حالت ناپایدار تمیز دهیم، نقطه ای به نام متاسنتر تعیین می شود. این نقطه همان طور که در شکل نشان داده شده، نقطه تلاقی خط BG و $B'G'$ است و با M نشان داده می شود.:

۱) نقطه M بالاتر از مرکز ثقل جسم است ← تعادل پایدار

۲) نقطه M بر روی مرکز ثقل G منطبق است ← تعادل خنثی

۳) نقطه M پایین تر از G قرار گرفته است ← حالت ناپایدار

فاصله GM به نام ارتفاع متاسنتر تعریف می شود. (ارتفاع متاسنتر = فاصله بین نقطه متاسنتر و مرکز ثقل)

$$GM = BM - GB$$

به عبارت دیگر:

فاصله بین مرکز ثقل و مرکز نیروی سبک کننده – فاصله بین نقطه متاسنتر و مرکز نیروی سبک کننده = ارتفاع متاسنتر

$$GM = \frac{I_0}{V} - GB \,,\; BM = \frac{I_0}{V}$$

I_0 : ممان دوم سطح مقطع طولی (نه جانبی) در خط مجاور آب نسبت به محوری است که از نقطه O می گذرد و کشتی (جسم شناور) حول آن تغییر وضعیت می دهد. V : حجم آب جابه جا شده است.

اگر $GM > 0$ باشد، تعادل پایدار است و زوج نیروی حاصل با در نظر گرفتن زاویه نوسان α گشتاوری معادل GG' خواهد داشت:

$GG' = GM \times \tan\alpha \Rightarrow$ اگر زاویه کوچک باشد $\Rightarrow G' = \alpha.GM$

گشتاور : $T = W.GM.\alpha$

مثال: یک قطعه چوب مکعب شکل به طول $6\ m$ و عرض $4\ m$ و ضخامت $2\ m$ به طور افقی در آب شناور است. اگر دانسیته چوب $700\ kg/m^3$ باشد، مطلوب است حجم آب جابه جا شده و مرکز شناوری؟ $\rho = 1000\ kg/m^3$

حل:

$$V = 2 \times 4 \times 6 = 48\ \ m^3$$

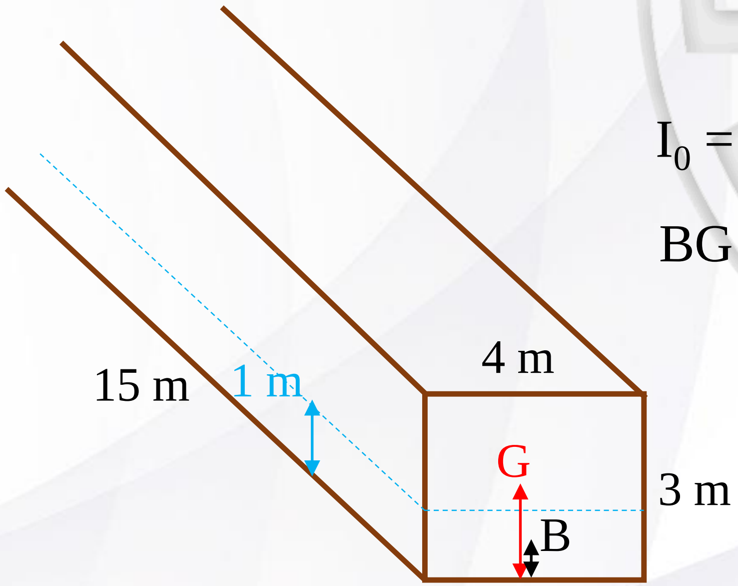
$$m = \rho V = 700 \times 48 = 33600\ kg$$

$$\text{حجم جابه جا شده} : \frac{m}{\rho} = \frac{33600}{1000} = 33.6 \ \ m^3$$

$$\text{عمق} = \frac{33.6}{24} = 1.4 \Rightarrow \text{مرکز شناوری} : \frac{\text{عمق}}{2} = 0.7 \ m$$

مثال: یک پل شناور که دارای سطح مقطع $4 \times 3 \ m^2$ و طول $15 \ m$ است (مقطع یکنواخت است). طوری در آب شناور گشته که $1 \ m$ از کف آن در آب قرار گرفته است، مطلوب است تعیین ارتفاع متاسنتر.

حل:



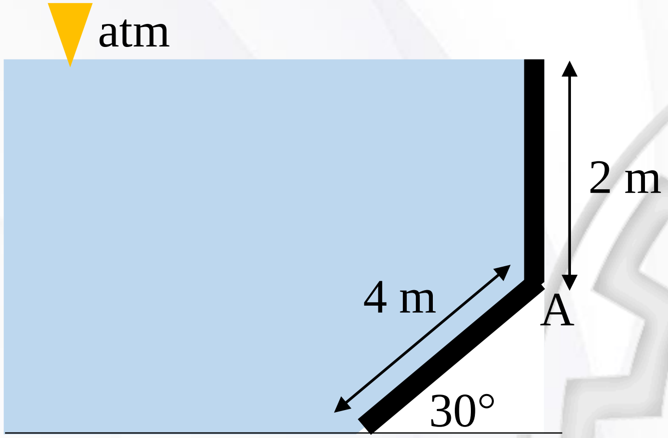
$$I_0 = \frac{lb^3}{12} = \frac{15 \times 4^3}{12} = 80 \ , \ V = 15 \times 4 \times 1 = 60 \ \ m^3 \ , \ BM = \frac{80}{60} = 1.33 \ m$$

$$BG = 1.5 - 0.5 = 1 \ m$$

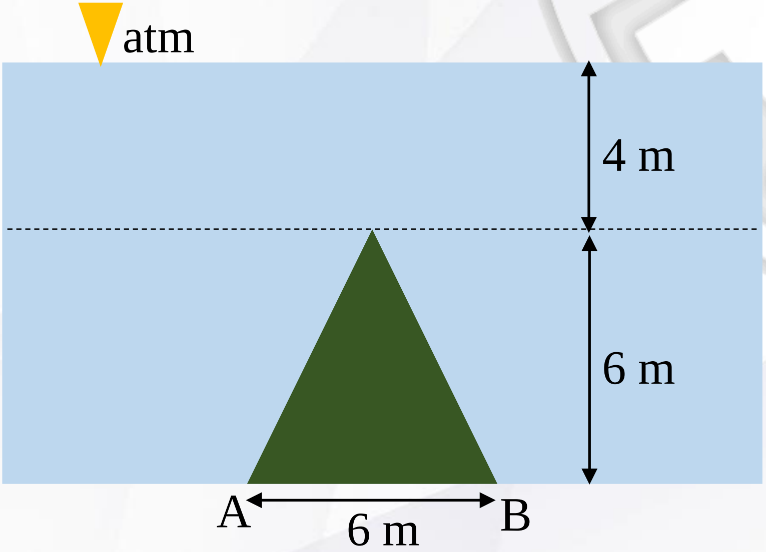
$$GM = BM - BG = 1.33 - 1 = 0.33 \ m \Rightarrow \text{تعادل پایدار است}$$

تکالیف:

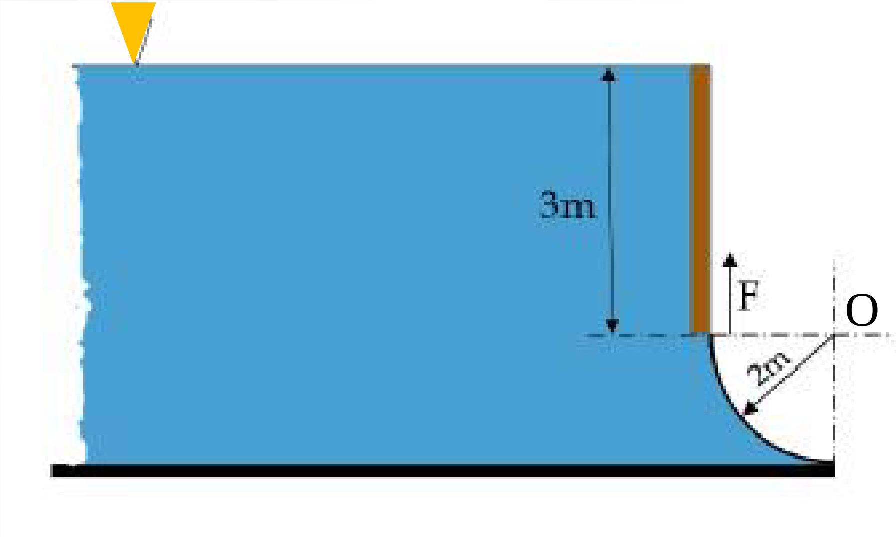
۱) یک دریچه مستطیل شکل طبق شکل زیر برای جلوگیری از خروج آب مورد استفاده قرار می گیرد. دریچه در نقطه A لولا شده است و دارای عرض 5 m و طول 4 m است. مطلوی است محاسبه برایند نیرو و نقطه اثر آن؟



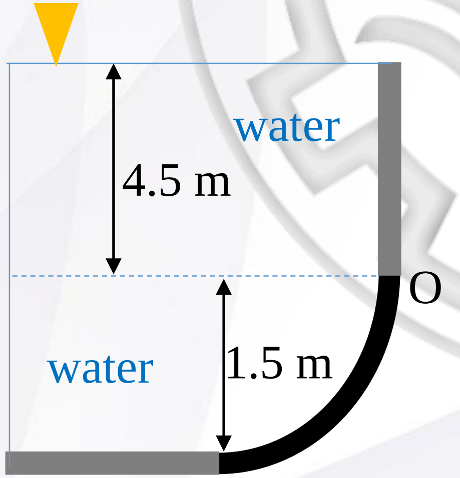
۲) دریچه مثلثی نشان داده شده در انتهای دیواره قائم یک مخزن حول محور افقی AB لولا شده است. نیرو و نقطه اثر آن و همچنین گشتاور مورد نیاز جهت نگهداشتن دریچه در وضعیت قائم را محاسبه کنید.



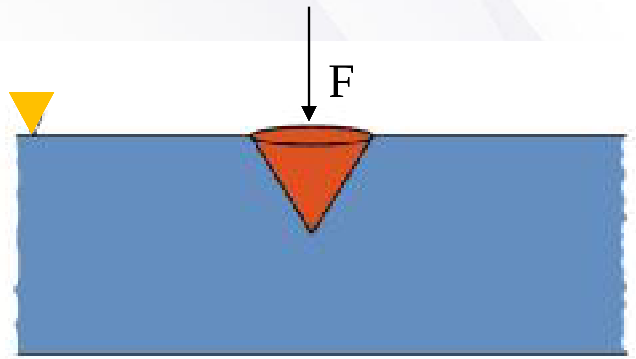
۳) در شکل زیر یک دریچه قطاعی نشان داده شده است. دریچه دارای عرض 2 m و در نقطه O لولا شده است. مطلوب است برایند نیرو و نقطه اثر آن؟



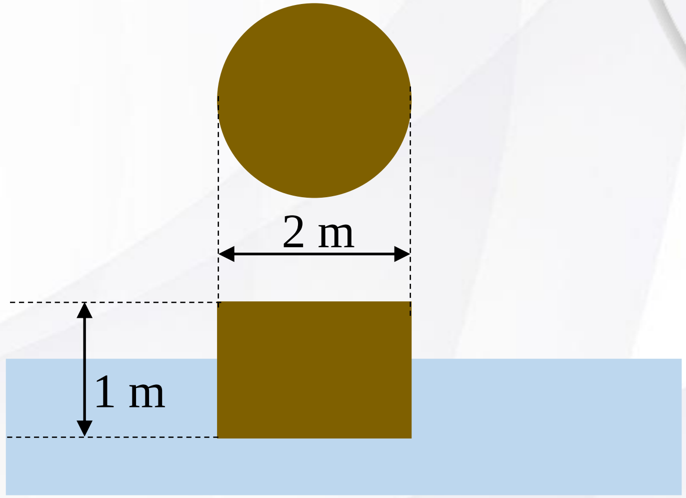
۴) دریچه نشان داده شده در شکل زیر دارای عرض 2 m و در نقطه O لولا شده است. مطلوب است محاسبه نیرو و نقطه اثر آن؟



۵) مخروطی به وزن 2 N به شعاع قاعده 5 cm و ارتفاع 18 cm مطابق شکل به صورت شناور در سطح مایعی به وزن مخصوص $8720\ N/m^3$ قرار دارد. نیروی لازم F برای اینکه مخروط مماس بر سطح آزاد مایع قرار گیرد، چقدر است؟



۶) یک استوانه جامد به قطر 2 m و ارتفاع 1 m از ماده ای با وزن مخصوص نسبی 0.7 ساخته شده و در آب شناور است. ارتفاع متاسنتر این استوانه چقدر است؟



۷) یک مخروط جامد به وزن 6.9 kN در روغنی به وزن مخصوص $9.3\ kN/m^3$ شناور است. حداقل زاویه راس مخروط چقدر باشد تا مطابق شکل زیر در روغن شناور باشد؟