دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مکانیک سیالات

استاد: دکتر علی زادهوش

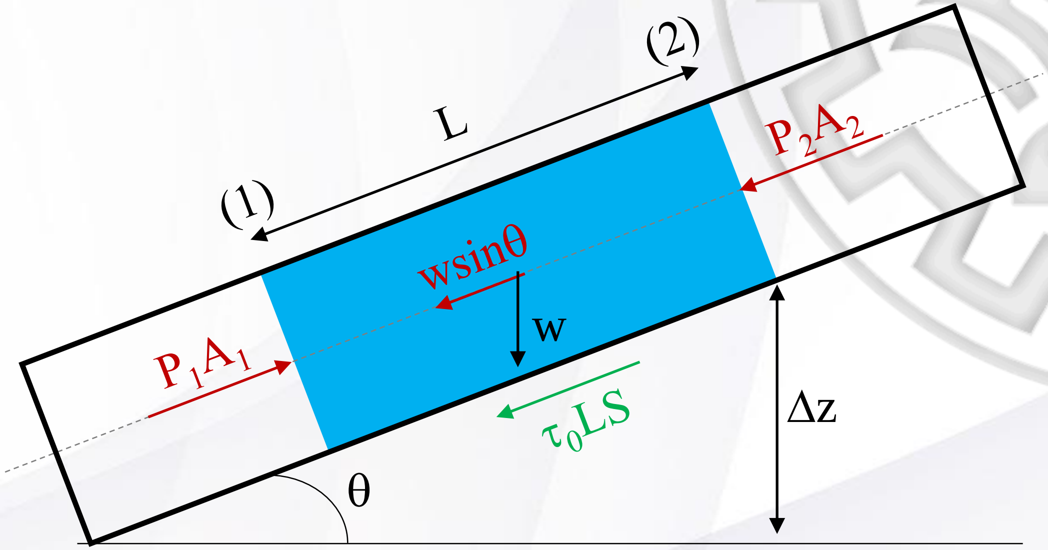
اردیبهشت ۱۴۰۰

فصل نهم: جریان آشفته (متلاطم، مغشوش)

✓ جریان متلاطم دائمی و تراکم ناپذیر در مجراهای محدود:

در بخش گذشته معادلات برای توزیع سرعت و افت (اتلاف) فشار برای جریان آرام بدست آمد. عدد رینولدز به عنوان شاخص مورد استفاده قرار گرفت. برای لوله ها اگر $Re < 2000$ جریان آرام می باشد. این نشانگر محدود بودن به شرایط شدت جریان پائین برای تمام گازها و مایعات با ویسکوزیته پائین است. بنابراین به طور کلی جریان متلاطم در مسائل هندسی بسیار بیشتر مطرح است. در زیر معادلات متلاطم برای اتلاف در شرایط آشفته درون مجراهای محدود و باز بدست خواهد آمد. در بررسی روابط مشاهده خواهد شد که تجزیه و تحلیل کاملا نظری امکان پذیر نیست و به روابط تجربی جهت بدست آوردن معادلات نیاز است.

عنصری از سیال درون یک مجرا مطابق، در نظر بگیرید.



جریان دائمی و یکنواخت فرض شده است که شتاب در جهت جریان صفر باشد. با استفاده از معادله مومنتوم بر عنصر سیال در جهت جریان خواهیم داشت:

$$P_1A - P_2A - \tau_0 LS - w\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$w = \rho g A L \ , \qquad \sin\theta = \frac{\Delta z}{L}$$

τ_0 : تنش برشی در دیواره، S : پیرامون یا محیط ترشده عنصر مورد نظر است که در تماس با سیال می باشد. A : مساحت سطح مقطع المان (المان یکنواخت)

$$\Rightarrow A(P_1 - P_2) - \rho g A \Delta z = \tau_0 L S$$

در اینجا P_1 و P_2 فشارهای استاتیک در دو بخش جریان یعنی نقاط (۱) و (۲) می باشند. با تقسیم دو طرف بر A و L خواهیم داشت:

$$\frac{1}{L}\{(P_1 - P_2) - \rho g \Delta z\} - \frac{\tau_0 S}{A} = 0$$

با استفاده از تعریف زیر:

$$\text{متوسط ارتفاع هیدرولیک یا شعاع هیدرولیک} = \frac{A}{S} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{dP^*}{dx} - \frac{\tau_0}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = m\frac{dP^*}{dx} \qquad (2)$$

$\frac{dP^*}{dx} \Leftarrow$ نرخ اتلاف فشار استاتیک در طول L مجرا و $\tau_0 \Leftarrow$ تنش برشی در دیواره است.

جهت تعیین τ_0، نیاز است از مفهوم جدیدی به نام ضریب اصطکاک استفاده شود که آن را با f نشان می دهند. این ضریب، بدون بعد است که در مطالعات اصطکاک سیال در لوله ها مورد استفاده قرار می گیرد:

$$\boxed{f = \frac{\text{تنش برشی در دیواره}}{\text{انرژی جنبشی به ازای واحد حجم}} = \frac{\frac{D.\Delta P}{4L}}{\frac{\rho v_m^2}{2}} = \frac{\tau_0}{\frac{\rho v_m^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = f \frac{1}{2} \rho v_m^2 \qquad (3)$$

$$\boxed{\frac{dP^*}{dx} = \frac{f.\rho.v_m^2}{2m} = \frac{\rho g h_f}{L}} \qquad (4)$$

$v_m \rightarrow$ سرعت متوسط

بنابراین، ارتفاع معادل اتلاف انرژی فشار بر روی طول L در یک مجرا با h_f نمایش داده می شود. پس نرخ اتلاف فشار استاتیک به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{f.\rho.v_m^2}{2m} = \frac{\rho g h_f}{L} \Rightarrow \boxed{h_f = \frac{f.L.v_m^2}{2gm}} \qquad (5)$$

برای یک لوله با سطح مقطع دایره ای:

برای لوله هایی که کاملا با مایع پر شده اند، پیرامون تر شده (S) مساوی است با محیط لوله داخلی، بنابراین:

$$m = \frac{A}{S} = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4}$$

$$\boxed{h_f = \frac{4.f.L.v_m^2}{2gd} \quad \rightarrow \text{معادله دارسی–ویسباخ برای ارتفاع معادل اتلاف در لوله های مدور}}$$

برای یک کانال روباز:

در این حالت داریم:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{d}{dx}(P + \rho g z)$$

جایی که z ارتفاع بالای خط مبنا می باشد.

برای کانال های روباز، همان طور که فشار استاتیک P فرض می شود که در طول کانال ثابت باقی بماند، خواهیم داشت:

$$\frac{dP^*}{dx} = \rho g.\frac{dz}{dx} = \rho g.\sin\theta \qquad (6)$$

برای جریان یکنواخت گرادیان هیدرولیک $\frac{h_f}{L}$ مساوی با شیب کانال خواهد بود:

$$\boxed{\frac{h_f}{L} = \sin\theta = i}$$

با مساوی کردن معادلات (۴) و (۶) خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{f.\rho.v_m^2}{2m} = \rho g i}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2g}{f}} \times \sqrt{mi} \quad , \sqrt{\frac{2g}{f}} = C \ (7) \quad \Rightarrow \quad v_m = C \times \sqrt{mi} \quad (8) \quad \Rightarrow$$ معادله شزی برای کانال باز جریان آشفته

شدت جریان برای یک کانال با شیب و زبری ویژه، مقدارهای مختلفی برای C در کانال های روباز مورد استفاده قرار گرفته است.

همان گونه که در اسلاید (۴) بیان شد، برای سطح مقطع دایره ای داریم:

معادله دارسی برای جریان آشفته درون لوله ها

$$h_f = 4f.\frac{L}{d}.\frac{v_m^2}{2g} \qquad (9)$$

این معادله از تمام لحاظ شبیه معادله شزی می باشد و به معادله دارسی–ویسباخ مشهور است. برای ارتفاع معادل اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک در لوله ها، اعم از اینکه جریان آرام و یا متلاطم باشد، معادله دارسی معادل با معادله پویزیول برای جریان آرام می باشد به جز اینکه شامل فاکتور f برای اتلاف اصطکاکی در جریان آشفته می باشد که برای جریان آرام نیاز نیست. اختلاف اساسی از پیچیدگی جریان متلاطم سرچشمه می گیرد، که ناشی از حقیقت رابطه $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ می باشد که آن را نمی توان استفاده کرد و بنابراین تجزیه و تحلیل نظری میسر نمی شود.

✓طرز بدست آوردن f ضریب اصطکاک:

ارتفاع معادل اتلاف انرژی در لوله های محدود بوسیله معادله دارسی داده شده است:

$$h_f = 4f.\frac{L}{d}.\frac{v_m^2}{2g}$$

همان طور که از معادله مشاهده می شود، تمام پارامترها به جز ضریب اصطکاک f قابل اندازه گیری است. نتیجه تجارب زیادی در این زمینه موفق به بدست آوردن روابط زیر شده است:

$h_f \propto \frac{1}{d}$ $\qquad h_f \propto v_m^2$ $\qquad h_f \propto L$

$h_f \propto$ وابسته به زبری سطحی دیواره لوله

$h_f \propto$ وابسته به جرم مخصوص و ویسکوزیته سیال

$h_f \rightarrow$ مستقل از فشار می باشد

مقدار f باید به طور صحیح انتخاب شود که مقدار صحیح h_f بوسیله معادله دارسی محاسبه شود و بنابراین نمی تواند یک مقدار ثابت باشد. مقدار f باید وابسته به تمام پارامترهای بالا باشد و آن را می توان به صورت تناسبی به کمک آنالیز ابعادی نوشت:

$$F = \phi_1 (v_m, d, \rho, \mu, \varepsilon, \varepsilon', \alpha) \qquad (10)$$

ε: معیاری از اندازه زبری است و ε' معیاری از فاصله میان ذرات زبری است که هر دو دارای ابعاد طول هستند.

α: فاکتور شکل است که پارامتر بدون بعد می باشد و مقدار آن وابسته به شکل ذرات زبری است.

به طور کلی برای یک لوله زبر، به کمک آنالیز ابعادی رابطه زیر بدست می آید:

$$f = \phi_2 \left(\frac{\rho v_m d}{\mu}, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{\varepsilon'}{d}, \alpha\right) = \phi_2 \left(Re, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{\varepsilon'}{d}, \alpha\right) \qquad (11)$$

کمکی که آنالیز ابعادی به برنامه ریزی برای مطالعات تجربی می کند، در این است که پارامترهای متغیر را به صورت مجموعه ای برای راه حل تجربی آماده می کند. رابطه ریاضی و نوع تابعیت f را آنالیز ابعادی نمی تواند معین کند و این امر باید به کمک آزمایشات انجام شود.

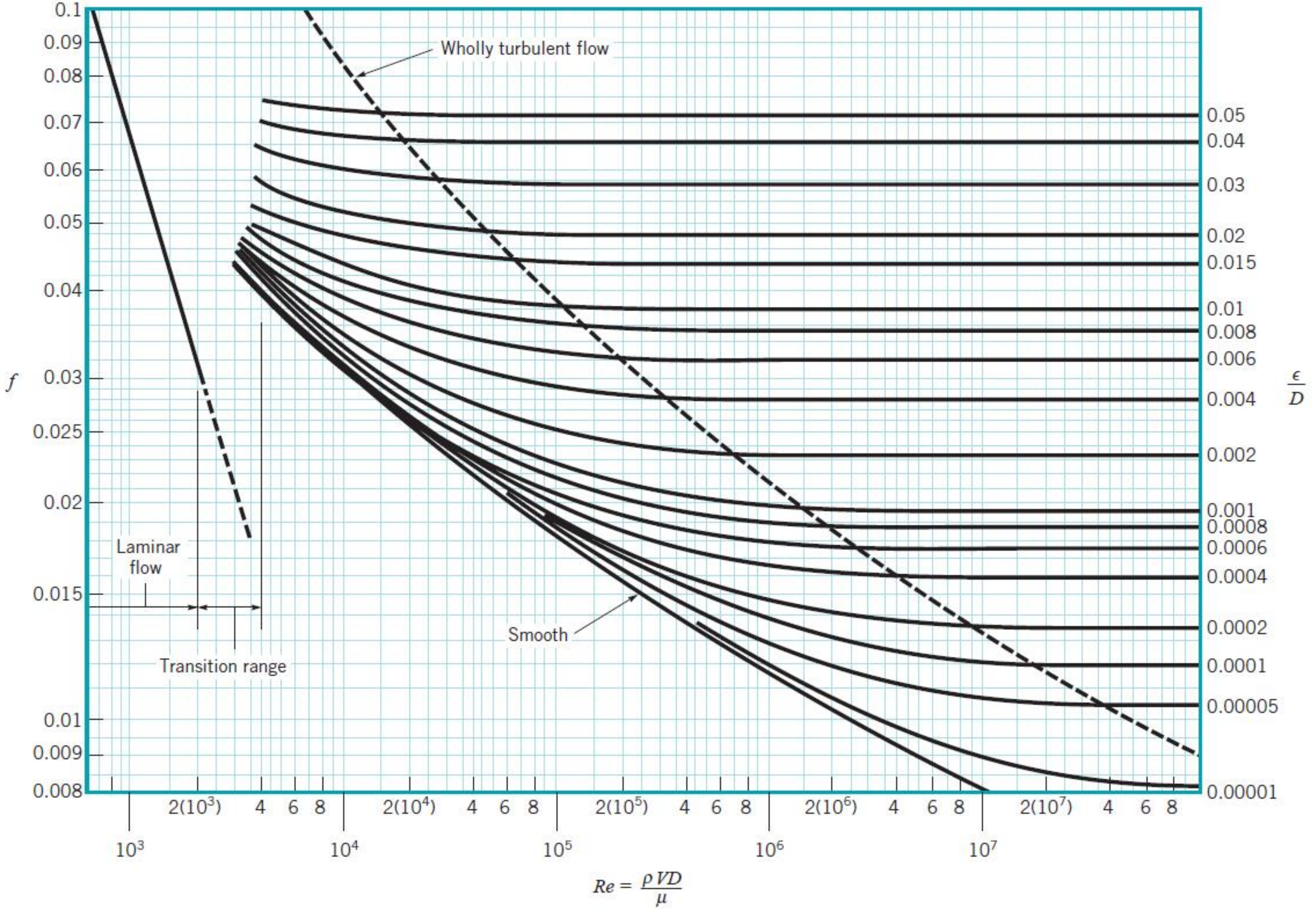
در سال ۱۹۱۳ بلازیوس (Blasius) برای اولین بار با استفاده از اندازه گیری هایی که در لوله های صاف انجام شده بود، رابطه زیر را که تا $Re = 10^5$ معتبر است، برای لوله های صاف به دست آورد:

$$f = \frac{0.079}{Re^{0.25}}$$

در سال۱۹۳۲ نیکورادزه (Nikuradse) آزمایش های مفصلی بر روی جریان آب در لوله هایی با زبری های متفاوت انجام داد. در این آزمایش ها، برای ایجاد زبری های متفاوت و معین، دانه های شن که دارای اندازه های معینی بودند، بر جدار داخلی لوله چسباند. او صحت وابستگی f به زبری نسبی $\frac{\varepsilon}{d}$ لوله را ثابت کرد. اما آزمایش های او نتوانستند اثر فاصله میان ذرات $\frac{\varepsilon'}{d}$ و یا فاکتور شکل α را بر روی ضریب اصطکاک نشان دهند. اما او توانست نشان دهد که برای یک نوع زبری رابطه زیر برقرار است:

$$f = \phi_3\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right) \quad (12)$$

مشکلات تجربی مانع بدست آوردن اثر $\frac{\varepsilon}{d}$ به تنهایی می شود. زیرا نمی توان $\frac{\varepsilon'}{d}$ و α را ثابت نگه داشت. با این وجود، نتایج بدست آمده ثابت می کند که f وابسته به Re و $\frac{\varepsilon}{d}$ (اندازه زبری است) و کمتر متاثر از فاصله میان ذرات و یا شکل آنها است. محاسبات افت ها در جریان متلاطم لوله وابسته به نتایج تجربی است و رایج ترین مرجع نمودار مودی می باشد. نتایج بدست آمده از این آزمایش رابطه بین f و Re و $\frac{\varepsilon}{d}$ به صورت لگاریتمی برای لوله های معمولی رسم شده است. این نوع ارائه داده ها را معمولا نمودار (دیاگرام) Stanton می نامند. یک نمودار مودی در اسلاید بعد نشان داده شده است. ناحیه های مختلف شناسایی شده به ترتیب زیر:


Wholly turbulent flow
f
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.009
0.008
Laminar flow
Transition range
Smooth
0.05
0.04
0.03
0.02
0.015
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0001
0.00005
0.00001
$\frac{\epsilon}{D}$
10^3 $2(10^3)$ 4 6 8 10^4 $2(10^4)$ 4 6 8 10^5 $2(10^5)$ 4 6 8 10^6 $2(10^6)$ 4 6 8 10^7 $2(10^7)$ 4 6 8
$Re = \frac{\rho VD}{\mu}$

۱) خط راست که جریان آرام نامگذاری شده و نمایانگر $f = \frac{16}{Re}$ که معادله پویزیول را به صورت ترسیمی نشان می دهد، یعنی:

$$Q = \frac{\Delta P.\pi d^4}{128\mu L}$$

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{128\mu LQ}{\rho g\pi d^4} \quad , \quad Q = \pi\frac{d^2}{4}.v_m \quad \Rightarrow \quad h_f = \frac{128\mu L\pi d^2 v_m}{\rho g\pi\frac{d^4}{4}} = \frac{4fLv_m^2}{2gd}$$

$$f = \frac{128\,\mu}{8\,\rho v_m d} = \frac{16}{Re} \qquad (13)$$

از رسم معادله فوق بر روی کاغذ لگاریتمی خط راستی با شیب (۱-) بدست می آید که مستقل از زبری سطح لوله می باشد. این رابطه نشان می دهد که معادله دارسی را نیز می توان برای جریان آرام مورد استفاده قرار داد، چنانچه که مقدار f صحیح مورد استفاده قرار بگیرد.

۲) برای مقادیر $0.001 > \frac{\varepsilon}{d}$ منحنی های لوله زبر در نمودار مودی به منحنی لوله صاف بلازیوس نزدیک می شود. به دلیل وجود پوسته آرام که در جریان متلاطم نزدیک به دیواره لوله ایجاد می شود که ضخامت آن با افزایش عدد رینولدز کاهش پیدا می کند. بنابراین برای بعضی ترکیب ها، زبری سطح و عدد رینولدز، ضخامت پوسته آرام به اندازه کافی است که زبری دیواره را پوشش دهد و جریان مانند اینکه لوله صاف است، عمل کند. برای عدد رینولدز بالاتر، ذرات زبری از پوسته آرام نازک شده، بیرون می زند و در اتلاف انرژی اثر می گذارد.

۳) برای عدد رینولدز بالاتر، یا لوله هایی با $\frac{\varepsilon}{d}$ بالا، تمام ذرات زبری از بالای پوسته آرام در معرض جریان قرار می گیرند. در این شرایط اتلاف، کاملا ناشی از بوجود آمدن جریان گردابی در اثر عبور از هر ذره از ذرات زبری لوله می باشد. این نوع اتلاف معروف به نوع اصطکاکی (Drag) می باشد و مستقیما متناسب با مربع متوسط سرعت جریان می باشد: $h_f \propto {v_m}^2$ و بنابراین از معادله دارسی f یک ثابت است که فقط وابسته به اندازه ذرات زبری می باشد. این شرایط در نمودار مودی قسمتی از نمودار است که منحنی های f بر حسب Re موازی با محور Re است که در مقدارهای بالای Re و $\frac{\varepsilon}{d}$ صورت می گیرد.

✓ جریان متلاطم دائمی و یکنواخت در کانال های باز:

در بخش قبل نشان داده شده که معادله پایه برای ارتفاع معادل اتلاف در جریان آشفته را می توان همزمان برای مجراهای باز و بسته بدست آورد. معادله پایه:

$$h_f = \frac{f.L.v_m^2}{2gm}$$

که به صورت معادله شزی کاهش می یابد:

$$\boxed{v_m = C.\sqrt{mi}}$$

همانطور که قبلا گفته شد، در مجراهای روباز برای جریان یکنواخت و دائمی $\frac{h_f}{L}$ شیب کانال خواهد بود. اما باید توجه کرد که برای جریان غیریکنواخت این رابطه صحیح نمی باشد. جایی که v_m متوسط سرعت در کانال با سطح مقطع A باشد، شدت جریان Q به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{Q = A.v_m = AC.\sqrt{mi}} \qquad (14)$$

هر چند که C را ضریب شزی می گویند، بدان معنی که یک ثابت بدون بعد است. اما این صحیح نیست زیرا مقدار C وابسته به واحدهای به کار برده شده است، جایی که $C = \sqrt{\frac{2g}{f}}$ و دارای بعد: $L^{\frac{1}{2}}.T^{-1}$ می باشد.

نشان داده شده است که برای جریان لوله ای، مقدار f وابسته به عدد رینولدز جریان و زبری سطح لوله است. بنابراین مناسب است که انتظار رود C هم با Re و $\frac{\varepsilon}{m}$ تغییر کند. جایی که m متوسط ارتفاع هیدرولیک به عنوان مشخصه طول برای سیستم استفاده می شود.

به طور کلی، وابستگی C به عدد رینولدز کوچک است اما $\frac{\varepsilon}{m}$ فاکتور تعیین کننده است. تقریبا برای تمام کانال های روباز، جریان کاملا متلاطم فرض می شود و با عدد رینولدز بالا و یا نتیجه $\frac{\varepsilon}{m}$ را می توان تنها فاکتور تاثیر گذار بر C تلقی کرد، به شرطی که شکل سطح مقطع ساده باقی بماند.

مثال: یک کانال رو باز با سطح مقطع مستطیل شکل دارای عرض 4.5 m می باشد. شیب آن 1 عمودی به 800 افقی است. متوسط سرعت جریان و شدت جریان را بدست آورید. عمق آب 1.2 m می باشد و مقدار C در معادله شزی 49 است.

حل:

$$v_m = C\sqrt{mi} = 49\sqrt{0.783 \times \frac{1}{800}} = 1.533\ \ m/s$$

$$Q = 1.533 \times 4.5 \times 1.2 = 8.28\ \ m^3/s$$

$$m = \frac{A}{S} = \frac{4.5 \times 1.2}{4.5+(2 \times 1.2)} = 0.783 \quad , \quad i = \frac{1}{800}$$

✓ توزیع سرعت جریان های متلاطم در لوله ها:

ماهیت پیچیده جریان آشفته مشکلاتی را در بدست آوردن معادله توزیع سرعت در جریان لوله ایجاد کرده است. با استفاده از روش آنالیز ابعادی با یک سری فرضیات بر اساس اهمیت نسبی ویسکوزیته سیال و ویسکوزیته اثر عبور (eddy) در پوسته آرام که در یک لایه مرزی توسعه یافته وجود دارد، می توان نوعی از معادله توزیع سرعت را پیش بینی کرد. چارچوب این معادلات از آزمایش های تجربی بدست آمده است.

برای یک جریان متلاطم لوله ای توسعه یافته با سطح مقطع دایره ای، فرض می شود سرعت موضعی u در فاصله y از دیواره لوله به صورت کلی تابعی از پارامترهای زیر باشد:

$$\bar{u} = \phi\,(\mu, \rho, \tau_0, R, y, \varepsilon) \qquad (15)$$

جایی که ρ، μ جرم مخصوص و ویسکوزیته سیال، R شعاع لوله، ε اندازه زبری ذره، τ_0 تنش برشی دیواره

با استفاده از آنالیز ابعادی داریم:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \phi_1\{(\frac{\rho R}{\mu}).\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.\frac{y}{R}.\frac{\varepsilon}{R}\}$$

که $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ دارای ابعاد سرعت می باشد و به آن سرعت تنش برشی (سرعت اصطکاکی) u^* می گویند.

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \phi_1\{\frac{\rho u^* R}{\mu}, \frac{y}{R}, \frac{\varepsilon}{R}\} \qquad (16)$$

جایی که $\frac{\rho u^* R}{\mu}$ نوعی از عدد رینولدز می باشد. برای ادامه به پیشبرد معادله (۱۶) باید فرض هایی درباره اهمیت گروه های مختلف در معادله داشته باشیم.

زبری سطح که با رابطه $\frac{\varepsilon}{d}$ نمایش داده شده است بر مقدار u^* تاثیر می گذارد. اما این فاکتور وقتی اهمیت دارد که ناحیه جریان نزدیک به دیواره باشد. به طور مشابه ویسکوزیته سیال دارای اهمیت مهم در پوسته آرام نزدیک دیواره لوله می باشد.

بنابراین سرعت در ناحیه مرکزی متلاطم لوله فرض می شود که فقط وابسته به موقعیت $\frac{y}{R}$ باشد. رایج است که این را به طور رابطه ای بر حسب نقص سرعت (velocity defect) بیان کرد یا اختلاف میان سرعت موضعی (u) در موقعیت y از دیواره و بیشینه سرعت جریان در مرکز لوله u_{max} است، بنابراین:

$$\boxed{\frac{(u_{max}-u)}{u^*} = \phi_2\left(\frac{y}{R}\right)} \qquad (17)$$

این معادله موسوم به توزیع نقص سرعت است. (velocity defect distribution)

✓ضریب اصطکاک و افت فشار:

افت فشار اصطکاکی به وسیله رابطه زیر بدست می آید(قبلا اثبات شده است):

$$\Delta P = \frac{4.\tau_w.L}{D} \qquad (1)$$

به دلیل پیچیدگی جریان متلاطم نمی توان راه حل های ساده موجود برای جریان آرام را در مورد آن به کار برد و دستیابی به محاسبات افت فشار مبتنی بر روابط تجربی است. رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta P = 4.\frac{L}{D}\left(\frac{\tau_w}{\rho u^2}\right)\rho u^2 \qquad (2)$$

در محدوده ای که ΔP دقیقا همانند u^2 تغییر می کند، کمیت $\left(\frac{\tau_w}{\rho u^2}\right)$ باید ثابت باشد.

در حالی که در مقادیر پایین تر Re مقدار $(\frac{\tau_w}{\rho u^2})$ کاملا ثابت نخواهد بود، اما به کندی با افزایش Re کاهش می یابد. در نتیجه $(\frac{\tau_w}{\rho u^2})$ یک کمیت مفید برای مرتبط ساختن داده های افت فشار خواهد بود. شکل دیگری از معادله فوق را می توان با جایگزین کردن هر دو جمله ρu^2 با $\frac{1}{2}\rho u^2$ بدست آورد:

$$\boxed{\Delta P = 4.\frac{L}{D}\left(\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2}\right)\frac{1}{2}\rho u^2} \qquad (3)$$

کمیت $\frac{1}{2}\rho u^2$ بعنوان انرژی جنبشی بر واحد حجم سیال شناخته می شود. عبارت $\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2}$ در معادله فوق کمیتی به نام ضریب اصطکاک فانینگ f است. بنابراین:

$$\boxed{f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2}} \qquad (4)$$

توجه شود که ضریب $\frac{1}{2}$ در معادله (۴) دلخواه است و ضرایب مختلف دیگری نیز می تواند به کار رود. به عنوان مثال در بعضی مراجع از ضریب اصطکاک مبنا با علامت j_f استفاده شده که با رابطه زیر تعریف می گردد:

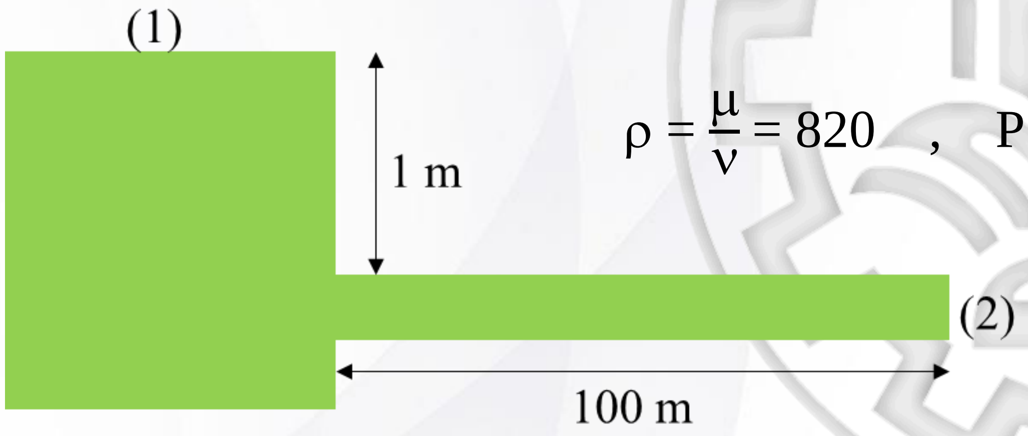
$$\boxed{j_f = \frac{\tau_w}{\rho u^2} \quad , \quad j_f = \frac{f}{2}}$$

هنگام به کارگیری j_f افت فشار توسط معادله (۲) بدست می آید. با به کارگیری ضریب اصطکاک فانینگ از رابطه (۳) تعریف می گردد:

$$\boxed{\Delta P = 4f.(\frac{L}{D})\frac{\rho u^2}{2} = \frac{2fL\rho u^2}{D}}$$

مثال: نفت با دمای صفر درجه سانتیگراد تحت تاثیر نیروی ثقل در لوله ای به قطر 6 mm و طول 100 m مطابق شکل زیر جریان دارد. شدت جریان سیال در این لوله را محاسبه کنید. $\mu = 3.2 \times 10^{-3}$ Pa.s و $\nu = 3.9 \times 10^{-6}$ m²/s

حل:



$$\rho = \frac{\mu}{\nu} = 820 \quad , \quad P_1 = P_2 = P_{atm} \quad , v_1 = 0$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1\frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_1\frac{v_2^2}{2g} + \frac{32\mu L v_2}{\gamma D^2}$$

$$0 + 1 + 0 = 0 + 0 + 0 + \frac{32\mu L v_2}{\gamma D^2}$$

به دلیل قطر کم لوله و بار کم هیدرولیک اعمال شده، سرعت درون لوله ناچیز فرض می شود.

$$\frac{32\mu L v_2}{\gamma D^2} = 1 \Rightarrow \quad v_2 = \frac{820 \times 9.81 \times 0.006^2}{32 \times 0.0032 \times 100} = 0.028 \text{ m/s}$$

حال فرض اولیه مبنی بر ناچیز بودن $\frac{v^2}{2g}$ را بررسی می کنیم.

$$Re = \frac{0.028 \times 0.006}{3.9 \times 10^{-6}} = 43.51 \quad << \quad 2000$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{0.028^2}{2 \times 9.81} = 3.99 \times 10^{-5} \quad \text{m} \quad \Rightarrow$$ بسیار کوچک و فرض درست است

$$Q = A.v = \pi(0.003)^2 \times 0.028 = 7.92 \times 10^{-7} \quad \text{m}^3/\text{s}$$

مثال: روغن با ویسکوزیته 1.44 Pa.s و دانسیته نسبی 0.9 در یک لوله به قطر 25 mm و طول 3 m با سرعت $\frac{1}{500}$ سرعت بحرانی که عدد رینولدز آن 2500 است، جریان دارد. مطلوبست محاسبه طول معادل افت فشار هد بر حسب متر روغنی که لازمه حرکت باشد.

حل:

$$Re = \frac{\rho v_c d}{\mu} = 2500 \quad \Rightarrow \quad v_c = \frac{2500 \times 1.44}{0.9 \times 1000 \times 0.025} = 160 \quad \text{m/s} \Rightarrow \quad v_m = \frac{v_c}{500} = \frac{160}{500} = 0.32 \quad \text{m/s}$$

$$Re = \frac{2500}{500} = 5 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{16}{5} = 3.2$$

$$\text{فشار لازم برای حرکت جریان} = \text{اتلاف فشار اصطکاکی} = \frac{4fLv_m^2}{2dg} = \frac{4\times 3.2\times 3\times 0.32^2}{2\times 0.025\times 9.81} = 8.02\ \mathrm{m}$$

✓ توان مورد نیاز برای پمپ:

می توان توان لازم برای پمپ را با دانستن تمام تغییرات در انرژی مربوط به پمپ کردن سیال از نقطه ای به نقطه دیگر محاسبه نمود. انرژی مورد نیاز برای پمپ کردن یک مایع را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

Ep = انرژی فشاری + انرژی جنبشی + انرژی پتانسیل + انرژی افت اصطکاکی

انرژی افت اصطکاکی برای جریان سیال در یک لوله شامل افت های اصلی و فرعی می باشد. افت اصلی به دلیل جریان مایع ویسکوز در قسمت های مستقیم لوله است. افت فرعی به دلیل استفاده از اجزای مختلف در خط لوله نظیر شیرآلات، سه راهی ها، زانوها و یا انقباض ناشی از ورود سیال از یک مخزن به لوله یا انبساط سیال هنگام ورود از لوله به مخزن رخ می دهد. بنابراین می توان نوشت:

Ep = انرژی فشاری + انرژی جنبشی + انرژی پتانسیل + انرژی افت اصلی + انرژی افت فرعی

اگر تعریف اسلاید قبل را به صورت ریاضی و بر حسب ارتفاع بنویسیم، داریم:

$$Ep = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{v_{m2}^2 - v_{m1}^2}{2g} + (z_2 - z_1) + \frac{2.f.L.v_m^2}{gd} + C\,\frac{v_m^2}{2g}$$

می توان توان لازم برای پمپ (Φ) را با توجه به اینکه، توان سرعت انجام کار است، بدست آورد. اگر سرعت جرمی جریان ($\dot{m}$) باشد، خواهیم داشت:

$$\text{توان} : \Phi = \dot{m} \times Ep \qquad (3)$$

که در رابطه (۳)، Ep کار انجام شده به ازای واحد جرم پمپ بر روی سیال است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$Ep = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{v_{m2}^2 - v_{m1}^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{2.f.L.v_m^2}{d} + C\,\frac{v_m^2}{g}$$

مثال: مطلوب است محاسبه توان پمپ برای جریان 50 Ton/h روغن، از درون لوله به قطر 100 mm و طول 1.6 km. جرم مخصوص روغن $915\ kg/m^3$ و ویسکوزیته سینماتیکی آن $0.00186\ m^2/s$ می باشد.

حل:

$$Q = 50\,\frac{Ton}{h} \times \frac{1000\ Kg}{1\ Ton} \times \frac{1\ h}{3600\ s} \times \frac{1}{915} = 0.0152\ \ m^3/s \quad , \quad v_m = \frac{Q}{A} = \frac{0.0152}{\pi \times 0.05^2} = 1.94\ \ m/s$$

$$Re = \frac{v_m d}{\nu} = 104.3 < 2100 \Rightarrow \text{جریان آرام} \Rightarrow f = \frac{16}{Re} = 0.154$$

$$h_f = \frac{4.f.L.v_m^2}{2gd} = \frac{4 \times 0.154 \times 1600 \times 1.94^2}{2 \times 9.81 \times 0.1} = 1891\ \ m \ , \ \Phi = \frac{mg}{time} \times head = \frac{50 \times 1000 \times 9.81}{3600} \times 1891 = 258\ \ kW$$

مثال: ارتفاع معادل افت ناشی از اصطکاک و توان لازم برای جریان آب درون یک لوله با قطر 40 mm و طول 750 m برای شدت جریان های زیر را بدست آورید. فرض کنید ضریب ویسکوزیته دینامیک آب 1.14×10^{-3} N.s/m² باشد و زبری مطلق 0.00008 m. الف) 4 l/min. ب) 30 l/min.

حل: الف)

$$Q = 4\,\frac{L}{min} \times 10^{-3} \times \frac{1}{60} = 66.7 \times 10^{-6} \;\; m^3/s \;\; \Rightarrow \;\; v_m = 52.9 \times 10^{-3} \;\; m/s$$

$$Re = \frac{\rho v_m d}{\mu} = 1856 < 2100 \;\; \Rightarrow \;\; \text{جریان آرام} \;\; \Rightarrow \;\; f = \frac{16}{Re} = 8.62 \times 10^{-3}$$

$$h_f = \frac{4.f.L.v_m^2}{2gd} = \frac{4 \times 0.00862 \times 750 \times 0.0529^2}{2 \times 9.81 \times 0.04} = 92.4 \times 10^{-3} \;\; m$$

$$\Phi = \frac{mg}{time} \times head = \dot{m} \times g \times h = \rho Q \times g \times h = 1000 \times 66.7 \times 10^{-6} \times 9.81 \times 92.4 \times 10^{-3} = 0.0602 \;\; W$$

ب) $Q = 30\,\frac{L}{min} \times 10^{-3} \times \frac{1}{60} = 0.5 \times 10^{-3} \;\; m^3/s \;\; \Rightarrow \;\; v_m = 0.398 \; m/s$

$$Re = \frac{\rho v_m d}{\mu} = 14035 > 4000 \;\; \Rightarrow \;\; \text{جریان آشفته}$$

زبری سطح : $\frac{\varepsilon}{D} = 0.002 \;, Re = 14035 \;\; \Rightarrow$ با استفاده از نمودار مودی $\Rightarrow \;\; f = 0.008$

$$h_f = \frac{4.f.L.v_m^2}{2gd} = \frac{4 \times 0.008 \times 750 \times 0.398^2}{2 \times 9.81 \times 0.04} = 4.89 \ \ m$$

$$\Phi = 1000 \times 0.5 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 4.89 = 23.76 \ \ W$$

مثال: یک خط لوله انتقال آب با میزان زبری مطلق $\varepsilon = 0.2$ mm موجود است. مطلوب است محاسبه عدد رینولدز؟ تنش برشی در دیواره 7.84 Pa و ویسکوزیته سینماتیک معادل 0.01 Stokes است.

حل:

$\varepsilon = 0.2 \times 10^{-3}$ m $\qquad \tau_0 = 7.84$ Pa $\qquad \nu = 0.01 \times 10^{-4}$ m^2/s

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{7.84}{1000}} = 0.0886 \ \ m/s$$

$$Re^* = \frac{v^* \varepsilon}{\nu} = \frac{0.0886 \times 0.2 \times 10^{-3}}{0.01 \times 10^{-4}} = 17.72$$

مثال: آب با جریان متلاطم در لوله ای با قطر 60 cm و سرعت جریان حجمی 0.6 m^3/s در حرکت است. زبری مطلق لوله 0.003 m می باشد. اتلاف توان در طول 1 km لوله را محاسبه کنید.

حل:

برای جریان متلاطم دارای زبری مطلوب است:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(3.71\,\frac{D}{\varepsilon}) = 2\log(3.71 \times \frac{0.6}{0.003}) \quad \Rightarrow f = 0.030$$

$$v = \frac{0.6}{\pi \times 0.3^2} = 2.12 \quad m/s$$

$$h_f = \frac{4fLv^2}{2gD} = \frac{4\times 0.03\times 1000\times 2.12^2}{2\times 9.81\times 0.6} = 45.9 \ \ m$$

$$\Phi = \frac{mg}{time} \times h_f = \dot{m} \times g \times h_f = \rho Q \times g \times h_f = 1000 \times 0.6 \times 9.81 \times 45.9 = 270 \ \ kW$$

مثال(مهم): یک لوله با قطر 10 cm و زبری مطلق 0.0025 m آب را با سرعت 2 m/s انتقال می دهد. اگر ویسکوزیته سینماتیک آب معادل 10^{-6} m^2/s باشد. فاکتور ضریب f را برای حالات زیر بدست آورید.

الف) جریان متلاطم بدون زبری (لوله صاف)

ب) جریان متلاطم دارای زبری

ج) هر دو جریان متلاطم بدون زبری و دارای زبری

حل:

$$Re = \frac{2 \times 0.1}{10^{-6}} = 2 \times 10^5$$

الف) در این حالت از معادله پرانتل-کارمن (Prandtl-Karman) استفاده می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\{ \frac{Re.\sqrt{f}}{2.51}\}$$

به منظور حل معادله از روش سعی و خطا استفاده می شود. جهت تقریب عدد اولیه از معادله زیر می توان کمک گرفت:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.785 \log Re - 1.424 \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = 1.785 \log (2 \times 10^5) \ - 1.424 \quad \Rightarrow \ f = 0.015476$$

از عدد $f = 0.015476$ در معادله پرانتل-کارمن جهت شروع روش سعی و خطا استفاده می شود تا عدد $f = 0.0155$ حاصل می گردد.

ب) در این حالت از معادله زیر استفاده می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(3.71 \frac{D}{\varepsilon}) = 2 \log(3.71 \times \frac{0.1}{0.0025}) \ \Rightarrow \ f = 0.053$$

ج) در این حالت از معادله کلبروک-وایت (Colebrook-White) استفاده می شود:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \{\frac{\varepsilon}{3.71.D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\}$$

مانند حالت (الف) از روش سعی و خطا می توان ضریب f را محاسبه نمود.

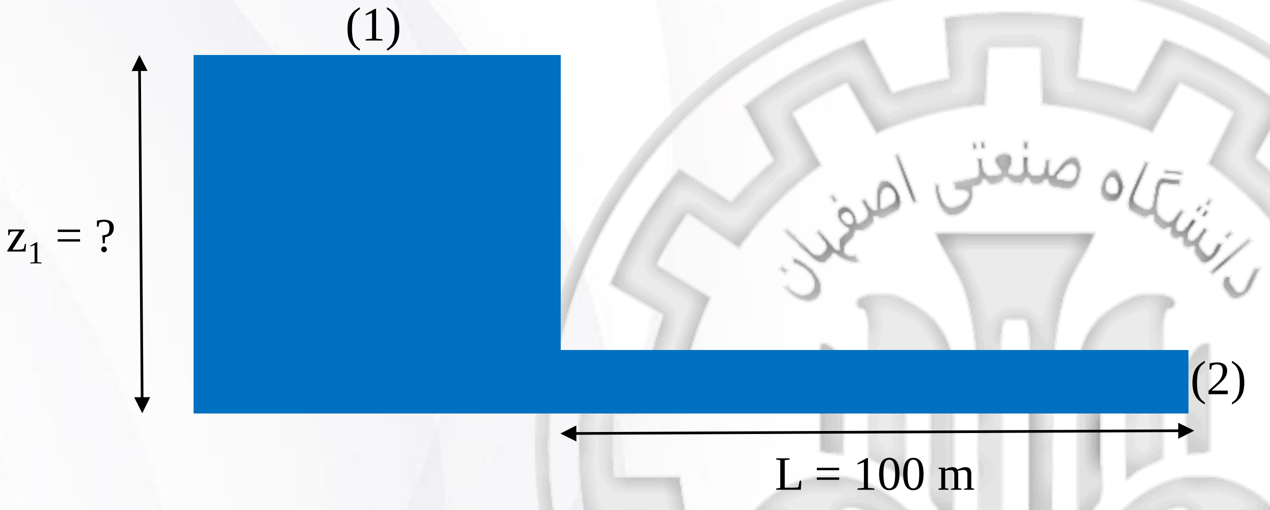
تکالیف:

۱) ضریب اصطکاک لوله چدنی به قطر 300 mm و زبری مطلق $\varepsilon = 0.25$ mm در عدد رینولدز $Re = 10^5$ را تعیین کنید.

۲) سیالی با سرعت جریان حجمی 60 l/s و ویسکوزیته سینماتیک 1.007×10^{-6} m²/s در لوله آهنی به قطر 200 mm و طول 1 km پمپاژ می شود. افت ارتفاع را محاسبه کنید. زبری مطلق آهن 0.046 mm است.

۳) سیالی با ویسکوزیته 2.1×10^{-3} Pa.s و دانسیته 997.1 kg/m³ از یک مخزن روباز به کمک لوله ای بهداشتی به قطر 0.02291 m مطابق شکل به مخزن روباز دیگری که در ارتفاع بالاتر قرار دارد، پمپ می شود. سرعت جریان جرمی در لوله مستقیم 30 m معادل 1 kg/s می باشد. تانک ذخیره، سطح مایع را در ارتفاع 3 m نگه داشته و سیال به ارتفاع 12 m بالاتر از کف پمپ می شود. توان لازم برای پمپ را محاسبه کنید. از انرژی افت فرعی صرف نظر کنید. در صورت نیاز $\varepsilon = 0.00006$ m است.

۴) با توجه به شکل زیر، جریان آب با سرعت جریان حجمی $0.01\ m^3/s$ در لوله ای متصل به مخزن با سطح ثابت جریان دارد. زبری مطلق لوله $\varepsilon = 0.0119\ mm$ و قطر لوله $75\ mm$ است. ویسکوزیته دینامیک آب برابر 10^{-3} می باشد. مطلوب است محاسبه عمق آب در مخزن؟



۵) با توجه به شکل زیر، فشار در نقاط (۳) و (۴) را با احتساب اتلاف انرژی محاسبه کنید.

$\varepsilon = 2\ mm \qquad \rho = 1000\ kg/m^3$

$\nu = 10^{-6}\ m^3/s \qquad Q = 0.63\ m^3/s$

$P_{atm} = 10^5\ Pa$