دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مکانیک سیالات

استاد: دکتر علی زادهوش

اردیبهشت ۱۴۰۰

فصل هشتم: جریان آرام

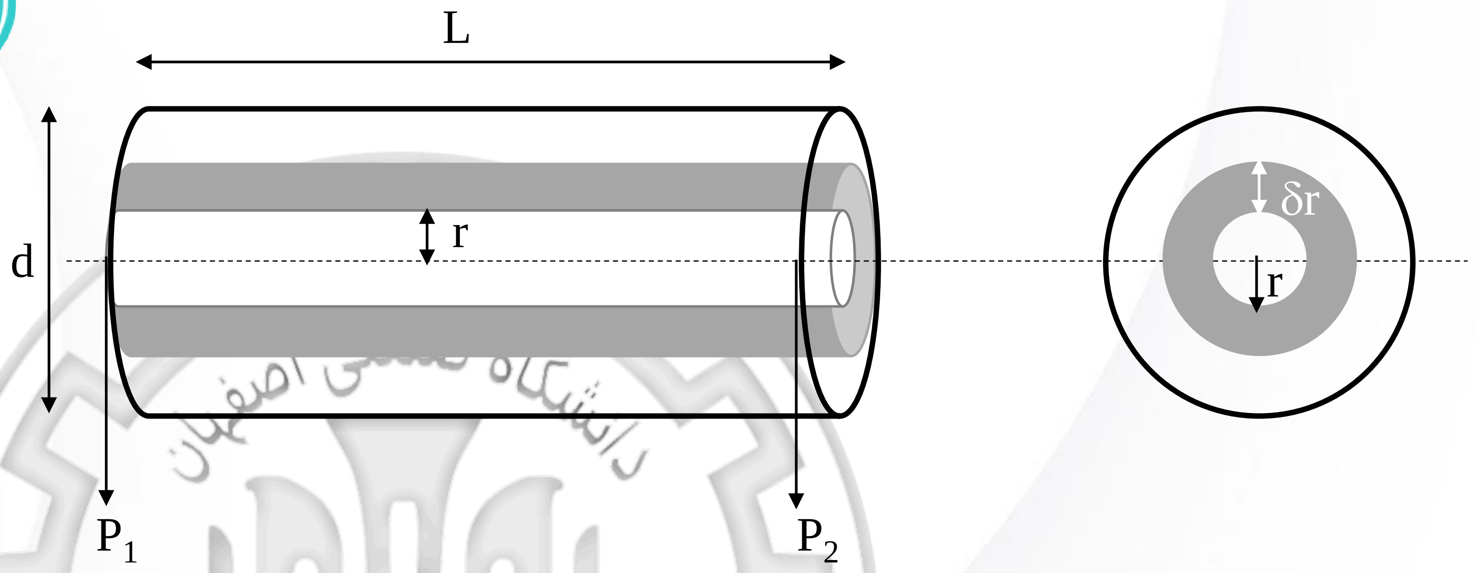
همانطور که قبلا اشاره شده است، عدد رینولدز جهت تشخیص جریان آرام از متلاطم و از پارامترهای اساسی می باشد. عدد رینولدز برای جریان درون یک لوله به صورت زیر نشان داده شده است:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

برای یک جریان درون لوله وقتی Re از مقدار بحرانی کمتر باشد (2100)، جریان آرام است. در حدود 2100 یک ناحیه گذرا وجود دارد که بالاتر از این مقدار جریان آشفته (متلاطم) خواهد بود. برای یک جریان درون لوله با قطر مشخص سرعت بحرانی v_c مربوط به عدد رینولدز بحرانی 2100 می باشد که جریان آرام (ویسکوز، لایه ای) است.

✓جریان آرام درون یک لوله مدور(توزیع نیروی برشی اصطکاک در مقطع یک لوله):

یک لوله مدور که سیالی نیوتنی در آن جریان دارد، در نظر بگیرید. المانی از سیال را بررسی می کنیم که این المان دارای شعاع r و ضخامت δr و سرعت جریان حجمی Q است. جهت تعیین Q، نیروهای وارد بر این المان را بررسی و در نهایت رابطه ای میان شدت جریان حجمی و افت فشار بدست می آوریم.



نیروی ناشی از اختلاف فشار $= (P_1 - P_2) \times \pi r^2 = \Delta P \times \pi r^2 = P\pi r^2$

تنش برشی (ویسکوز) × سطح جانبی = نیروی ناشی از تنش برشی اصطکاک

$$= -\ 2\pi r L \times (\mu . \frac{dv}{dr})$$

نیروی بوجود آورنده جریان = نیروی مخالف

$$P\pi r^2 = -\ 2\pi r L \times (\mu . \frac{dv}{dr}) \Rightarrow dv = -\ \frac{P.r.dr}{2\mu L} \Rightarrow v = -\ \frac{Pr^2}{4\mu L} + A \xRightarrow{v=0\ ,\ d=\frac{d}{2}} \boxed{v = \frac{\Delta P}{4\mu L}\left(\frac{d^2}{4} - r^2\right)} \quad (1)$$

رابطه (۱)، رابطه توزیع سرعت برای جریان آرام و سیال نیوتنی درون یک لوله مدور است.

با توجه به رابطه، هر چه r افزایش یابد ← سرعت کاهش می یابد.

سرعت جریان حجمی درون عنصر $= \delta Q = 2\pi . r . \delta r \times v = \frac{2\pi r P}{4\mu L}\left(\frac{d^2}{4} - r^2\right) . \delta r$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi P}{4\mu L}\int_0^{\frac{d}{2}}\left(\frac{d^2}{4} - r^2\right) . dr = \ldots \qquad \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi \Delta P d^4}{128\ \mu L}\quad \text{قانون پویزیول}}$$

متوسط سرعت : $v_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2} \Rightarrow$ $\boxed{v_m = \frac{\Delta P d^2}{32\ \mu L} \rightarrow \text{متوسط سرعت جریان آرام در لوله مدور}}$

$$\boxed{v_{max} = \frac{\Delta P d^2}{16\ \mu L} \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{1}{2} v_{max}}$$

$\Delta P . \pi r^2 = 2\pi r L . \tau \Rightarrow \tau = r . \frac{\Delta P}{2L} \rightarrow$ توزیع تنش

$$r \rightarrow r_w \quad \text{or} \quad r \rightarrow \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_w = \frac{d . \Delta P}{4L} = \frac{R . \Delta P}{2L}}$$

اگر جریان آشفته باشد ← معادله دارسی جامع است:

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

ضریب اصطکاک: f شعاع هیدرولیک: m $\leftarrow$ برای یک لوله: $\frac{d}{4}$

ارتفاع معادل ناشی از فشار : $h_f = \frac{f.L.v_m^2}{2gm} = \frac{32\mu L V_m}{\rho g d^2}$

$$\frac{f.L.v_m^2}{2gm} = \frac{4.f.L.v_m^2}{2gd} \Rightarrow h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} \Rightarrow \Delta P = h_f \rho g = \frac{32\mu L V_m}{d^2}$$

از معادله پویزیول داریم:

$\frac{4.f.L.v_m^2}{2gd} = \frac{32\mu L v_m}{\rho g d^2} \Rightarrow f = \frac{16\mu g}{\rho g v_m d} \Rightarrow$ با توجه به عکس عدد رینولدز داریم $\Rightarrow \boxed{f = \frac{16}{\frac{\rho v d}{\mu}} = \frac{16}{Re}}$

$\boxed{f \text{ تعریف} = \frac{\tau_w \text{ تنش برشی دیواره}}{\text{انرژی جنبشی به ازای واحد حجم}} = \frac{R.\frac{\Delta P}{2L}}{\rho \frac{v_m^2}{2}} = \frac{R\Delta P}{\rho v_m^2 L} = \frac{d\Delta P}{2\rho v_m^2 L}}$

از طرفی داریم: $\Delta P = \rho g h$

$2\rho.L.f.v_m^2 = d\Delta P \Rightarrow \Delta P = \frac{2\rho v_m^2 L.f}{d}$, $(d = 4m) \Rightarrow \boxed{h_f = \frac{f.L.v_m^2}{2mg} \quad \text{معادله دارسی}}$

مثال: گلیسیرین با ویسکوزیته $0.9\ N.s/m^2$ و جرم مخصوص $1260\ kg/m^3$ درون یک لوله افقی پمپ می شود. لوله دارای طول 65 m و قطر 0.01 m است. شدت جریان حجمی 180 l/min است. آیا جریان آرام است یا آشفته؟ افت فشار ناشی از اصطکاک را بدست آورید. همچنین بیشینه شدت جریان برای شرایط آرام را بدست آورید. معیار آرام بودن را 2000 در نظر بگیرید.

حل:

$$Q = 180\ l/min \times \frac{10^{-3}}{60} = 3 \times 10^{-3}\ m^3/s \quad \Rightarrow Q = vA \ \Rightarrow \ v = 38.2 \quad m/s$$

$$Re = \frac{1260 \times 38.2 \times 0.01}{0.9} = 534.8 < 2000 \Rightarrow$$ جریان آرام

$$Q = \frac{\pi \Delta P d^4}{128\ \mu L} \ \Rightarrow \Delta P = \frac{128 Q.\mu.L}{\pi d^4} = 715051328\ \ Pa \ \ \Rightarrow v_{max} = \frac{\Delta P d^2}{16 \mu L} = 76.4\ m/s$$

مثال: الف) برای جریان آرام، درون یک لوله مدور قانون پویزیول را اثبات کنید. ب) روغن با شدت جریان حجمی $0.02\ m^3/s$ در یک لوله با قطر 15 cm جریان دارد. افت انرژی هر 100 m از این لوله چقدر است؟ ضریب اصطکاک جریان را بدست آورید؟ دانسته نسبی روغن 0.85 و ویسکوزیته سینماتیک $6 \times 10^{-4}\ m^2/s$ و $L = 100\ m$ و $d = 0.15\ m$ و $Q = 0.02\ m^3/s$

حل: الف) اثبات در اسلایدهای ۲، ۳ و ۴ موجود است.

ب) $\nu = \mu/\rho \Rightarrow \mu = 6 \times 10^{-4} \times 0.85 \times 1000 = 0.51 \quad N.s/m^2$

$$v_m = Q/A = \frac{0.02}{\pi \times 0.075^2} = 1.132\ m/s\ , \quad Re = \frac{vD}{\nu} = 283 < 2000 \Rightarrow$$

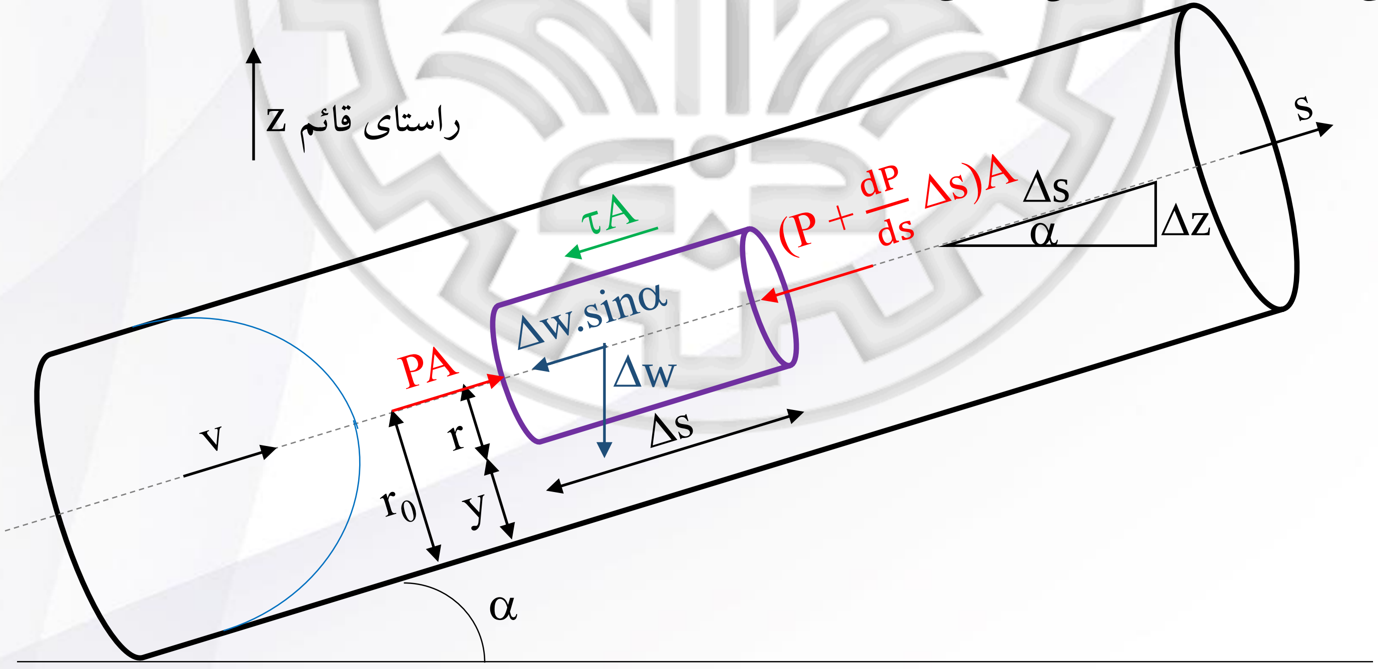
جریان آرام

$$h_f = \frac{32\mu L v_m}{\rho g d^2} = \frac{32 \times 0.51 \times 100 \times 1.132}{850 \times 9.81 \times 0.15^2} = 9.85\ \ m\ , \quad f = 16/Re = 16/282 = 0.057$$

✓ **جریان آرام درون لوله مدور شیب دار:**

پروفایل سرعت در یک لوله، ارتباط نزدیک با توزیع نیروی برشی در آن مقطع دارد. از اینرو، فهم توزیع برشی اهمیت پیدا می کند. برای تعیین توزیع این نیرو، معادله تعادل برای یک المان استوانه ای شکل که محورش منطبق بر محور لوله است، مطابق شکل نوشته می شود. در جریان های یکنواخت دائمی، نیروهای فشار، ثقل، برشی و اصطکاک بر عنصر مورد نظر اثر کرده و معادله تعادل به صورت زیر است:

$$\sum F_s = 0$$



با در نظر گرفتن المان نشان داده شده در شکل اسلاید قبل و مشخص کردن نیروهای موثر بر المان مورد نظر داریم:

0 = نیروی برشی ناشی از اصطکاک در جهت عکس – نیروی وزن در جهت عکس جریان – نیروی ناشی از اختلاف فشار در جهت جریان

$$PA - (P + \frac{dP}{ds}\Delta s)A - \Delta w \sin\alpha - \tau(2\pi r)\Delta s = 0 \qquad (1)$$

که در آن داریم:

$$\Delta w = \rho g v = \gamma A \Delta s \qquad , \qquad \sin\alpha = \frac{dz}{ds}$$

لذا می توان رابطه (۱) را به صورت زیر نوشت:

$$-\frac{dP}{ds} . \Delta s . A - \gamma A \Delta s . \frac{dz}{ds} - \tau(2\pi r)\Delta s = 0 \qquad (2)$$

حال با تقسیم رابطه (۲) بر $A\Delta s$ و ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$\boxed{\tau = \frac{r}{2}\{-\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\} \qquad (3) \qquad (\tau = \frac{r\Delta P}{2L})} \qquad (3) \quad , \quad \tau_w = \frac{R\Delta P}{2L}$$

نسبت $\frac{d}{ds}(P + \gamma z)$ در تمامی مقطع در جریان های یکنواخت، ثابت و منفی است. در نتیجه $\frac{d}{ds}(P + \gamma z)$ – در تمامی مقطع لوله مقداری ثابت و مثبت بوده، بنابراین τ در رابطه (۳) در مرکز لوله بوده و به طور خطی افزایش یافته تا در جداره لوله به حداکثر خود می رسد.

تغییرات سرعت در یک مقطع عمود بر خطوط جریان در لوله ها را می توان با جایگزینی تنش برشی از معادله (۳) در رابطه $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ و انتگرال گیری بدست آورد.

$$\mu \frac{dv}{dy} = \frac{r}{2} \{- \frac{d}{ds} (P + \gamma z)\} \qquad (4)$$

با توجه به اینکه $\frac{dv}{dy} = - \frac{dv}{dr}$ است، داریم:

$$- \mu \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2} \{- \frac{d}{ds} (P + \gamma z)\} \rightarrow \frac{dv}{dr} = - \frac{r}{2\mu} \{- \frac{d}{ds} (P + \gamma z)\} \qquad (5)$$

با جداسازی متغیرها و انتگرال گیری در سطح مقطع داریم:

$$v = - \frac{rdr}{2\mu} \{- \frac{d}{ds} (P + \gamma z)\} \rightarrow v = - \frac{r^2}{4\mu} \{- \frac{d}{ds} (P + \gamma z)\} + C \qquad (6)$$

مقدار ثابت انتگرال را می توان با علم به اینکه به ازای $r = r_0 \leftarrow v = 0$ خواهد شد، بدست آورد:

$$C = (\frac{r_0^2}{4\mu}) \{- \frac{d}{ds} (P + \gamma z)\}$$

به این ترتیب معادله توزیع سرعت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$v = \left(\frac{r_0^2 - r^2}{4\mu}\right)\left\{-\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\right\} \qquad (7)$$

رابطه (۷) نشان می دهد که توزیع سرعت در یک مقطع برای جریات لایه ای (آرام یا ویسکوز) در یک لوله به صورت سهمی است که حداکثر آن در مرکز و حداقل آن در جدار لوله و برابر صفر خواهد بود.

در بسیاری از مسائل انتقال دهنده ها، رابطه بین تغییرات فشار و شدت جریان و یا متوسط سرعت مورد نظر است. بنابراین لازم است تا از رابطه $dQ = vdA$ بر روی سطح مقطع جریان انتگرال گیری شود. در این صورت داریم:

$$Q = \int_0^A vdA$$

با جایگذاری برای v از رابطه (۷) داریم:

$$Q = \int_0^{r_0}\left(\frac{r_0^2 - r^2}{4\mu}\right)\left\{-\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\right\}.(2\pi r dr)$$

از آنجا که عبارت $\dfrac{\pi\{\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\}}{4\mu}$ در سطح مقطع لوله ثابت است، پس از انتگرال گیری داریم:

$$Q = \frac{2\pi}{4\mu}\left\{-\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\right\}\int_0^{r_0}(r_0^2 r - r^3)dr = \frac{\pi}{2\mu}\left\{-\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\right\}\left[\frac{r_0^4}{4}\right]$$

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu}\{-\frac{d}{ds}(P+\gamma z)\} \qquad (9) \qquad (Q = \frac{\pi \Delta P d^4}{128\,\mu L})$$

متوسط سرعت عبارت است از شدت جریان حجمی تقسیم بر سطح، اگر طرفین معادله (۹) را به سطح مقطع تقسیم کنیم، رابطه زیر برای سرعت متوسط حاصل می گردد:

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{\pi r_0^4}{8\mu \times \pi r_0^2}\{-\frac{d}{ds}(P+\gamma z)\}$$

$$\bar{v} = \frac{r_0^2}{8\mu}\{-\frac{d}{ds}(P+\gamma z)\} \qquad (10) \qquad (v_m = \frac{\Delta P.d^2}{32\mu L})$$

سرعت بیشینه همانطور که از معادله توزیع سرعت (۷) وقتی بدست می آید که $r = 0$ باشد، یعنی حداکثر سرعت در مرکز لوله می باشد:

$$v_{max} = \frac{r_0^2}{4\mu}\{-\frac{d}{ds}(P+\gamma z)\}$$

از مقایسه رابطه اخیر با معادله (۱۰) مشاهده می شود سرعت متوسط، نصف سرعت بیشینه است. همچنین با جایگزینی r_0 با $\frac{D}{2}$ داریم:

$$\bar{v} = \frac{D^2}{32\mu}\{-\frac{d}{ds}(P+\gamma z)\}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}(P+\gamma z) = -\frac{32.\mu.\bar{v}}{D^2}} \qquad (11)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۱۱) بین دو سطح مقطع ۱ و ۲ در امتداد لوله خواهیم داشت:

$$d(P+\gamma z) = -\frac{32.\mu.\bar{v}}{D^2}\, ds$$

$$(P_2 - P_1) + \gamma(z_2 - z_1) = -\frac{32.\mu.\bar{v}}{D^2}(s_2 - s_1)$$

که در آن $(s_2 - s_1)$ عبارتست از طول لوله (L) بین دو مقطع انتخابی، معادله فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{32.\mu.L.\bar{v}}{\gamma D^2}} \qquad (12)$$

رابطه (۱۲)، معادله انرژی را برای جریان یکنواخت سیال های غیرقابل تراکم در لوله های با قطر ثابت نشان می دهد. رابطه (۱۲) را می توان به زیر نوشت:

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + h_f} \qquad (13)$$

h_f ارتفاع معادل اتلاف انرژی است که در نتیجه مقاومت اصطکاک است، بنابراین با استفاده از تعاریف اسلاید ۵:

$$h_f = \frac{fLv_m^2}{2gm}\,,\ m = \frac{d}{4} \Rightarrow h_f = \frac{2fLv_m^2}{gd} \qquad (1)$$

$$f = \frac{16\mu g}{\rho g\bar{v}d} = \frac{16\mu}{\rho\bar{v}d} \quad (2) \qquad \Rightarrow \qquad (1),(2) \Rightarrow \boxed{h_f = \frac{32.\mu.L.\bar{v}}{\gamma D^2}}$$

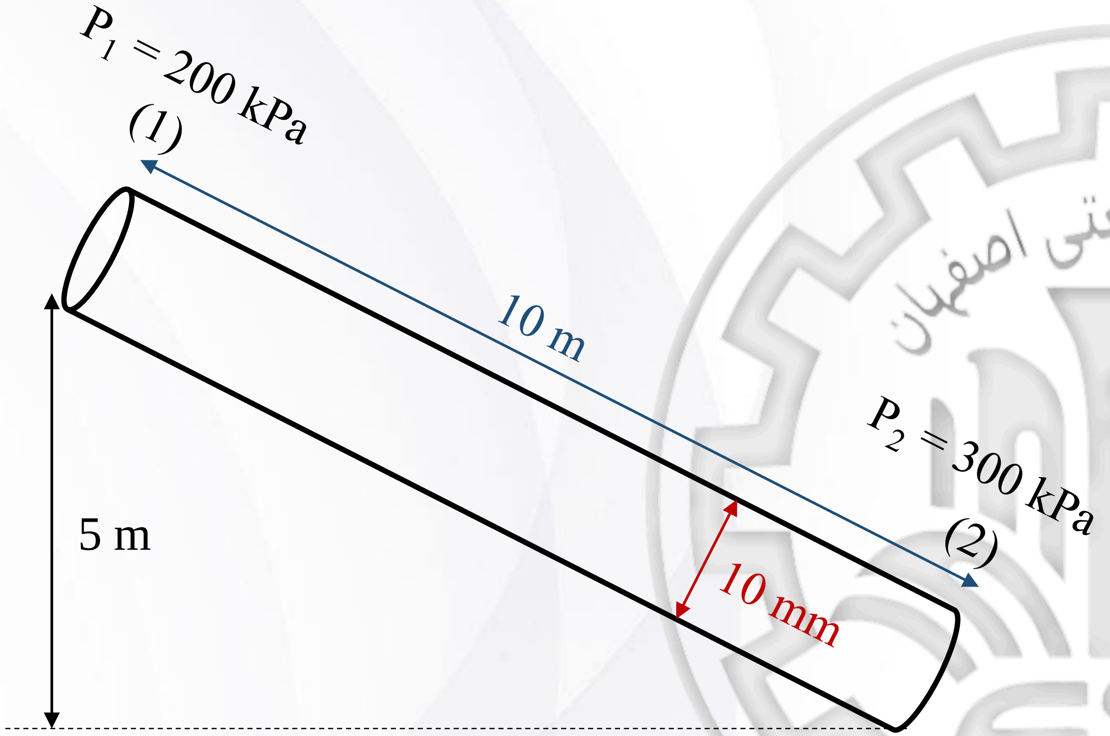
دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

مثال: مایعی با وزن مخصوص $8000\ N/m^3$ و ویسکوزیته $0.04\ Pa.s$ در یک لوله شیب دار مطابق شکل جریان دارد. مطلوب است:

الف) جهت جریان را مشخص کنید.

ب) دبی جریان بر حسب l/s را بدست آورید.

ج) عدد رینولدز جریان را محاسبه کنید.



حل: الف)

$$(1) : P + \gamma h = \{200 + (8000 \times 10^{-3} \times 5)\} = 240\ kPa$$

$$(2) : P + \gamma h = \{300 + (8000 \times 10^{-3} \times 0)\} = 300\ kPa$$

با توجه به این نکته که در جهت جریان افت فشار اتفاق می افتد،

بنابراین جهت جریان از نقطه (۲) به (۱) است.

ب)

$$\frac{d}{dL}(P + \gamma h) = \frac{(300 \times 10^3) - (240 \times 10^3)}{10} = 6000\quad N/m^3$$

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu}\{-\frac{d}{ds}(P + \gamma z)\} = \frac{\pi r_0^4}{8\mu}\{-6000\} = -0.00368\ \ l/s$$

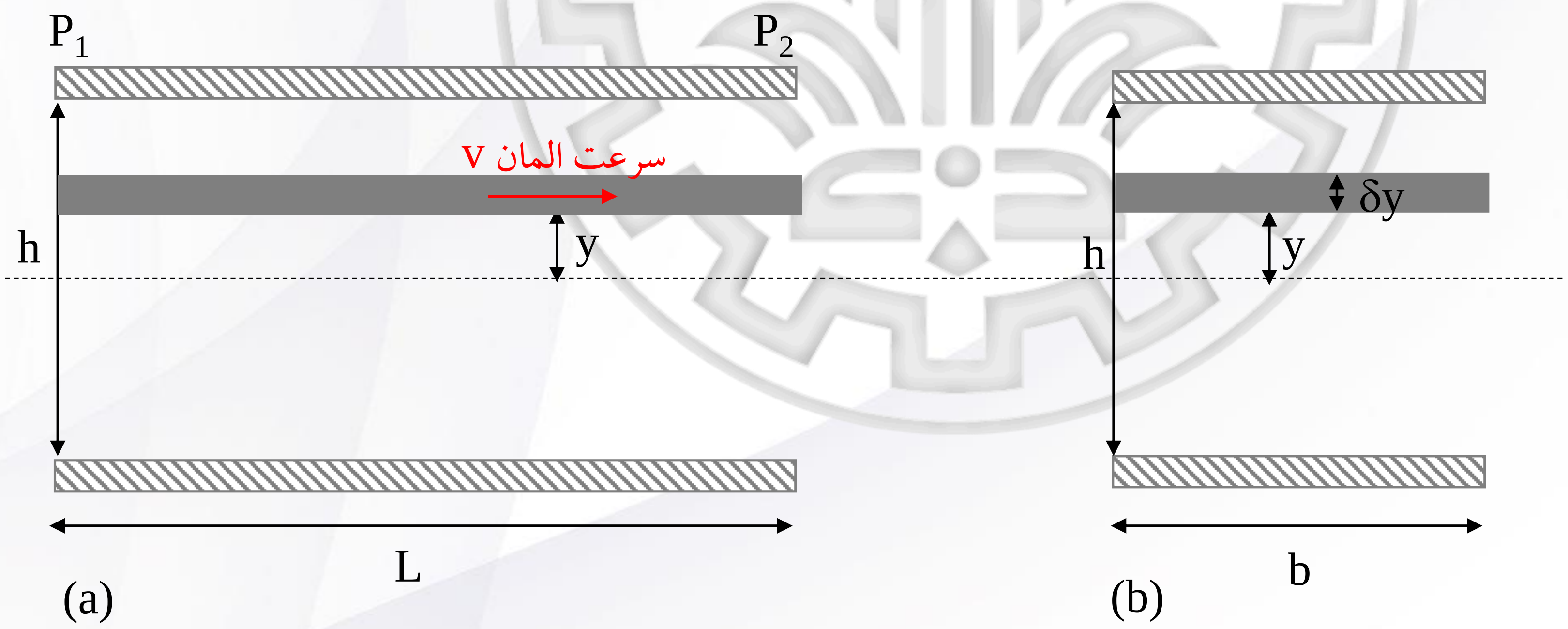
ج)

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{36.8 \times 10^{-6}}{\pi \times 0.005^2} = 0.47 \ \ m/s \qquad \Rightarrow \quad Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\mu} = 95.8$$

✓ **جریان آرام میان سطح های موازی ثابت:**

فرض کنید سیال دائمی، تراکم ناپذیر در شرایط آرام، در یک مجرای مستطیل شکل در حال جریان است.

یک المان متقارن (یعنی تنش برشی متقارن باشد) با عرض b، ارتفاع بسیار کم h، طول L در جهت جریان و تحت فشار دیفرانسیلی ΔP و صرف نظر از اثرات جانبی در نظر می گیریم. در این شرایط عدد رینولدز بحرانی برای جریان آرام 1000 در نظر گرفته می شود. در اینجا نیروی وزن حذف شده است. ممکن است نیروی وزن در جهت حرکت اضافه شود:



$(P_1 - P_2) \times b \times 2y$ = سطح مقطع × اختلاف فشار = نیروی ناشی از اختلاف فشار (نیروی پیش برنده)

$\tau \times 2bL$ = سطح جانبی × تنش برشی ویسکوز = نیروی ناشی از تنش برشی (نیروی ناشی از اصطکاک– نیروی بازدارنده)

$\tau = -\mu.\dfrac{dv}{dy} \Rightarrow$ نیروی ناشی از تنش برشی $= -\mu.\dfrac{dv}{dy} \times 2bL$

بعلت بازدارنده بودن، از علامت منفی استفاده می شود.

$$(P_1 - P_2) \times b \times 2y = 2\,\Delta Pby = -\mu.\frac{dv}{dy} \times 2bL \Rightarrow dv = -\frac{\Delta P.y.dy}{\mu L}$$

$$v = -\frac{\Delta P y^2}{2\mu L} + A \quad , \quad v = 0 \quad , \quad y = \frac{1}{2}h \quad \Rightarrow A = \frac{\Delta P}{2\mu L}.\frac{h^2}{4}$$

توزیع سرعت : $\boxed{v = \dfrac{\Delta P}{2\mu L}.\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)}$

$$y = 0 \Rightarrow v_{max} = v_0 \Rightarrow \boxed{v_{max} = \frac{\Delta P h^2}{8\mu L}}$$

برای المان : δQ = سطح مقطع × سرعت

$\delta Q = b\delta y \times \dfrac{\Delta P}{2\mu L}.\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right) \Rightarrow$ پس از انتگرال گیری داریم $\Rightarrow Q = \dfrac{\Delta Pb}{2\mu L}.\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right).dy \Rightarrow \boxed{Q = \dfrac{\Delta P.b.h^3}{12\mu L}}$

$$v_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{bh} \Rightarrow v_m = \frac{\Delta P.h^2}{12\mu L} \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{2}{3} v_{max}}$$

برای بدست آوردن تنش برشی در دیواره و توزیع تنش برشی:

نیروی ناشی از فشار $= \Delta P \times A$

$$dv = -\frac{\Delta P.y.dy}{\mu L} \Rightarrow \frac{dv}{dy} = -\frac{\Delta P.y}{\mu L}$$

$$-\frac{\tau}{\mu} = \frac{dv}{dy} = -\frac{\Delta Py}{\mu L} \Rightarrow \tau = -\mu.\frac{dv}{dy} = -\frac{\Delta P.y}{\mu L} \Rightarrow -\frac{\tau}{\mu} = -\frac{\Delta P.y}{\mu L} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\Delta P.y}{2L}}$$ توزیع تنش برشی

وقتی : $y = \frac{h}{2} \Rightarrow \tau = \tau_w \Rightarrow \tau_w = \frac{\Delta P.h}{2L}$

$$\Delta P = \frac{12\mu.L.v_m}{h^2}$$

$$\boxed{\tau_w = \frac{\Delta P.h}{2L} = \frac{12\mu.L.v_m}{h^2} \times \frac{h}{2L} = \frac{6\mu.v_m}{h}}$$ تنش برشی در دیواره

مثال: یک پیستون به قطر 7 cm و طول 8 cm درون یک سیلندر قرار دارد. فاصله پیستون و سیلندر 1 mm می باشد. فضای میان سیلندر و

پیستون با روغنی با ضریب ویسکوزیته 1 Poise پر شده است. پیستون تحت تاثیر وزنه 18 kg به طرف پایین حرکت می کند. مطلوب است محاسبه سرعت حرکت روغن در فضای میان دو سیلندر، شدت جریان حجمی روغن و سرعت پیستون.

حل: با فرض اینکه سیال میان دو سطح موازی می باشد. (فاصله سیلندر و پیستون)

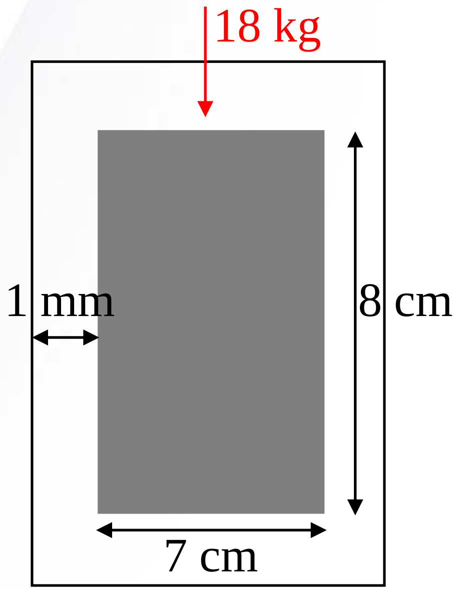
$$\Delta P = \frac{W}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{18 \times 9.81}{\pi \frac{0.07^2}{4}} = 45906 \quad N/m^2$$

$$\mu = 1\ \text{Poise} = 0.1\ NS/m^2$$

$$v_m = \frac{\Delta P.h^2}{12\mu L} = \frac{45906 \times 0.001^2}{12 \times 0.1 \times 0.08} = 0.478 \quad m/s$$

حجم روغن خروجی $= v_m \times$ سطح فضای میان سیلندر و پیستون $= 0.478 \times 0.07 \times 0.001 = 3.346 \times 10^{-5} \quad m^3/s$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\text{حجم روغن خروجی از سیلندر}}{\text{سطح پیستون}} = \frac{3.346 \times 10^{-5}}{\pi \frac{0.07^2}{4}} = 8.694 \times 10^{-3} \quad m/s$$

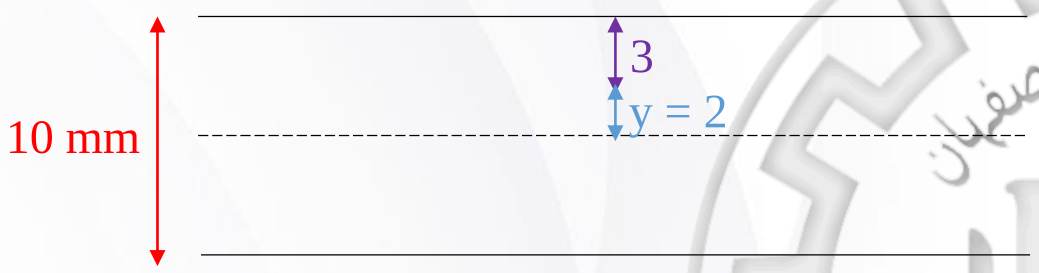


مثال: الف) رابطه توزیع سرعت و شدت حجمی و تنش برشی در دیواره را برای جریان آرام میان سطح های موازی ثابت بدست آورید. ب) روغنی با دانسیته نسبی 0.8 بین دو صفحه مسطح با جداره صاف و فاصله 10 mm جریان دارد. اگر بیشینه سرعت برابر 1.5 m/s باشد و

ضریب ویسکوزیته روغن $2 \times 10^{-2}\ \mathrm{N.s/m^2}$ باشد، مطلوب است محاسبه تنش برشی در دیواره و سرعت در فاصله 3 mm از دیواره.

حل: الف) اثبات در اسلایدهای ۷، ۸ و ۹ موجود است.

ب) فاصله 3 mm از دیواره یعنی $y = 2$ mm به عبارتی:



$$v_m = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1\ \mathrm{m/s} \quad , \quad \tau_w = \frac{6\mu . v_m}{h} = \frac{6 \times 0.02 \times 1}{10 \times 10^{-3}} = 12 \quad \mathrm{N/m^2}$$

$$v = \frac{\Delta P}{2\mu L}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (1)$$

$$v_m = \frac{\Delta P\, h^2}{12\mu L} \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{12\, \mu\, v_m}{h^2} = \frac{12 \times 0.02 \times 1}{0.01^2} = 2400 \quad \mathrm{N/m^2}$$ کاهش فشار در طول جریان

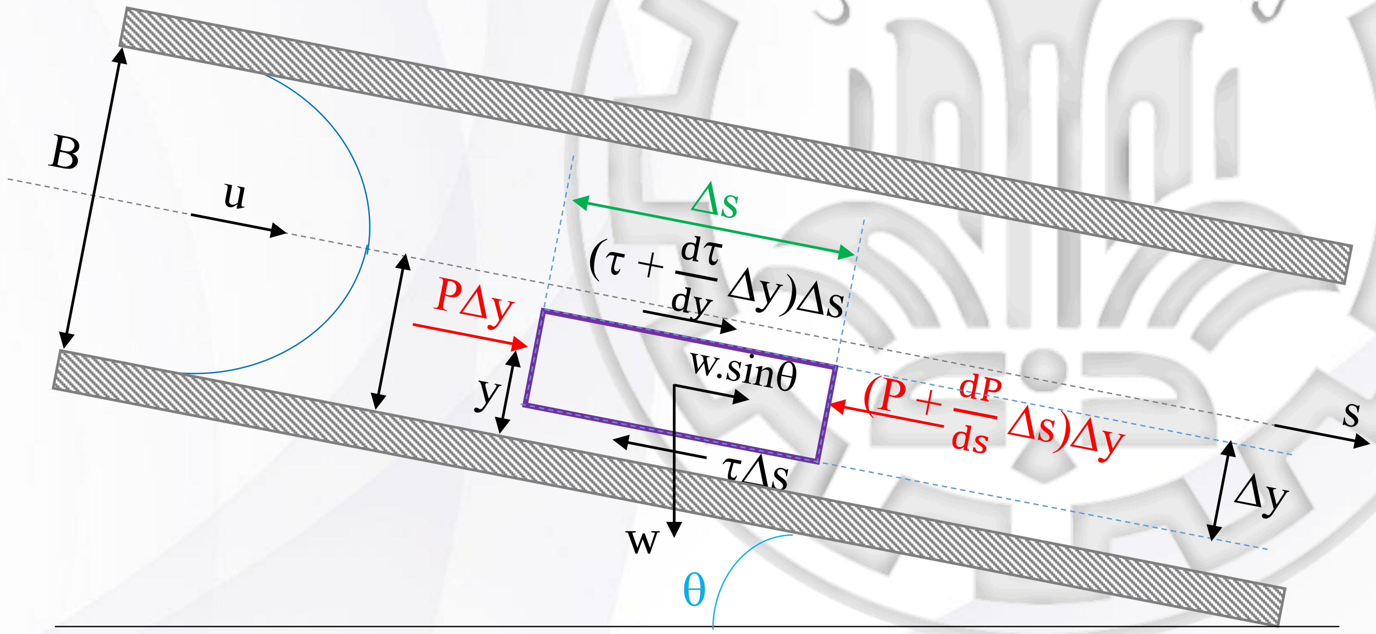
$$(1) \Rightarrow v = \frac{\Delta P}{2\mu L}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{2400}{2 \times 0.02}\left(\frac{0.01^2}{4} - (2 \times 10^{-3})^2\right) = 1.26 \quad \mathrm{m/s}$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

✓جریان سیال بین صفحات موازی همراه با تغییر فشار در طول صفحه:

در اینجا وضعیت عمومی جریان دو بعدی بین دو صفحه موازی شیب دار بررسی می شود که با افق زاویه θ تشکیل می دهند و شیب فشار معینی در جهت جریان وجود دارد. المانی مطابق شکل ($\Delta s \times \Delta y \times 1$) تعریف می شود، داریم:

$$\sum F_s = 0$$



0 = نیروی ناشی از ثقل + نیروی ناشی از اصطکاک – نیروی ناشی از اختلاف فشار

$$-\frac{dP}{ds}\Delta s.\Delta y + \frac{d\tau}{dy}\Delta s.\Delta y + w\sin\theta = 0$$

با تقسیم طرفین رابطه بر Δs و Δy و با توجه به اینکه:

$$\sin\theta = -\frac{dz}{ds} \quad , \quad w = \gamma.\ \Delta s.\ \Delta y$$

$$\frac{dz}{ds}\gamma + \frac{dP}{ds} = \frac{d\tau}{dy}$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{ds}(P + \gamma z) = \gamma\frac{d}{ds}(\frac{P}{\gamma} + z) = \gamma\frac{dh}{ds}$$

از طرفی برای جریان ویسکوز داریم:

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

$$\frac{d}{dy}(\mu\frac{du}{dy}) = \gamma\frac{dh}{ds}$$

با توجه به ثابت بودن ویسکوزیته داریم:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{dh}{ds}$$

که پس از دو بار انتگرال گیری از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$u = \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{dh}{ds} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 = 0$$

ضرایب انتگرال C_1 و C_2 با قرار دادن شرایط حدی در بالا و پائین جریان یعنی $u = 0$ به ازای $y = 0$ و $y = B$ بدین ترتیب بدست خواهد آمد:

$$C_2 = 0 \qquad , C_1 = -\frac{\gamma}{2\mu} \cdot \frac{dh}{ds} \cdot B$$

بنابراین:

$$\boxed{u = -\frac{\gamma}{2\mu} .(By - y^2). \frac{dh}{ds} \qquad \{u = \frac{\Delta P}{2\mu L} (\frac{B^2}{4} - y^2)\}}$$

که در آن داریم:

$$\boxed{h = \frac{P}{\rho g} + z \qquad \text{or} \qquad h = = \frac{P}{\gamma} + z}$$

در اینجا توزیع سرعت شکل سهمی دارد. ولی حداکثر سرعت در حد واسطه بین دو صفحه رخ می دهد. همچنین با انجام انتگرال گیری

از u بر روی سطح مقطع عمود بر جهت جریان و تقسیم آن بر مساحت سطح مقطع می توان نشان داد که متوسط سرعت برابر با $\frac{2}{3}$ سرعت بیشینه می باشد.

توجه داشته باشید، جریان سیال نتیجه ای از تغییر ارتفاع پیزومتریک است و فقط به P یا z بستگی ندارد. نتیجه تجربیات نشان می دهد اگر عدد رینولدز که بر پایه ضخامت بین دو لایه بدست می آید کمتر از 1000 باشد، جریان آرام خواهد بود.

سرعت بیشینه در حد واسط بین دو صفحه رخ می دهد. یعنی وقتی $y = \frac{B}{2}$ باشد، بنابراین:

$$\boxed{u_{max} = -\frac{\gamma}{2\mu}.(B \times \frac{B}{2} - (\frac{B}{2})^2).\frac{dh}{ds} = -\frac{\gamma B^2}{8\mu}.\frac{dh}{ds}}$$

برای بدست آوردن شدت جریان در واحد عرض، از سرعت در عمق جریان انتگرال می گیریم:

$$q = \int_0^B u\,dy = \int_0^{\mathbf{B}} -\frac{\gamma}{2\mu}.(By - y^2).\frac{dh}{ds}.dy$$

از آنجا که عبارت $\frac{\gamma}{2\mu}.\frac{dh}{ds}$ در سطح مقطع بین دو صفحه ثابت است لذا:

$$q = -\frac{\gamma}{2\mu}\frac{dh}{ds}\int_0^{\mathbf{B}}(By - y^2)\,dy \rightarrow \ldots \rightarrow \boxed{q = -\frac{\gamma B^3}{12\mu}.\frac{dh}{ds} \qquad (Q = \frac{\Delta P.b.B^3}{12\mu L})}$$

B: فاصله میان دو صفحه، b: عرض، L: طول، ΔP: افت فشار، μ: ویسکوزیته

جهت محاسبه سرعت متوسط با تقسیم q بر مساحت سطح مقطع یعنی $(1 \times B)$ خواهیم داشت:

$$\bar{u} = \frac{q}{B} = \frac{\gamma B^3}{12\mu B} \cdot \frac{dh}{ds}$$

$$\bar{u} = \frac{\gamma B^2}{12\mu} \cdot \frac{dh}{ds} \qquad \left(u_m = \frac{\Delta P.B^2}{12\mu L} \quad , \quad u_m = \frac{2}{3} \cdot u_{max}\right)$$

مثال: روغنی با دانسیته نسبی 0.8 بین دو صفحه مسطح عمودی با جدار صاف و فاصله 10 mm جریان دارد. اگر شدت جریان در واحد عرض برابر با $0.01\ m^2/s$ باشد. شیب فشار در جهت جریان چقدر است؟ فرض کنید ویسکوزیته سیال $2 \times 10^{-2}\ N.s/m^2$ باشد.

حل:

$$u_m = \frac{Q}{A} = \frac{0.01}{0.01} = 1\ m/s \quad , \quad Re = \frac{800 \times 1 \times 0.01}{2 \times 10^{-2}} = 400 \rightarrow \text{جریان آرام}$$

$$u = -\frac{\gamma}{2\mu} .(By - y^2). \frac{dh}{ds}$$

$$y = \frac{B}{2} \Rightarrow u_{max} = -\frac{\gamma B^2}{8\mu} \cdot \frac{dh}{ds} = -4.905 \frac{dh}{ds}$$

$$q = u_m.B\ ,\ q = 0.01\ m^3/s \quad , B = 0.01\ m\ , \quad u_m = \frac{2}{3} . u_{max} \Rightarrow u_{max} = 1.5\ m/s$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1.5}{-4.905} = -0.306$$

h شامل دو بخش است:

$$h = \frac{P}{\rho g} + z \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{P}{\rho g} + z\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{P}{\gamma}\right) + \frac{d}{ds}(z)$$

در اینجا چون صفحات عمودی هستند: $\frac{dz}{ds} = 1$ و جهت جریان به سمت پایین است، پس داریم:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{P}{\gamma}\right) = -0.306 + 1 = 0.694 \quad , \quad \frac{dP}{ds} = (0.8 \times 9810) \times 0.694 = 5446 \quad N/m^3$$

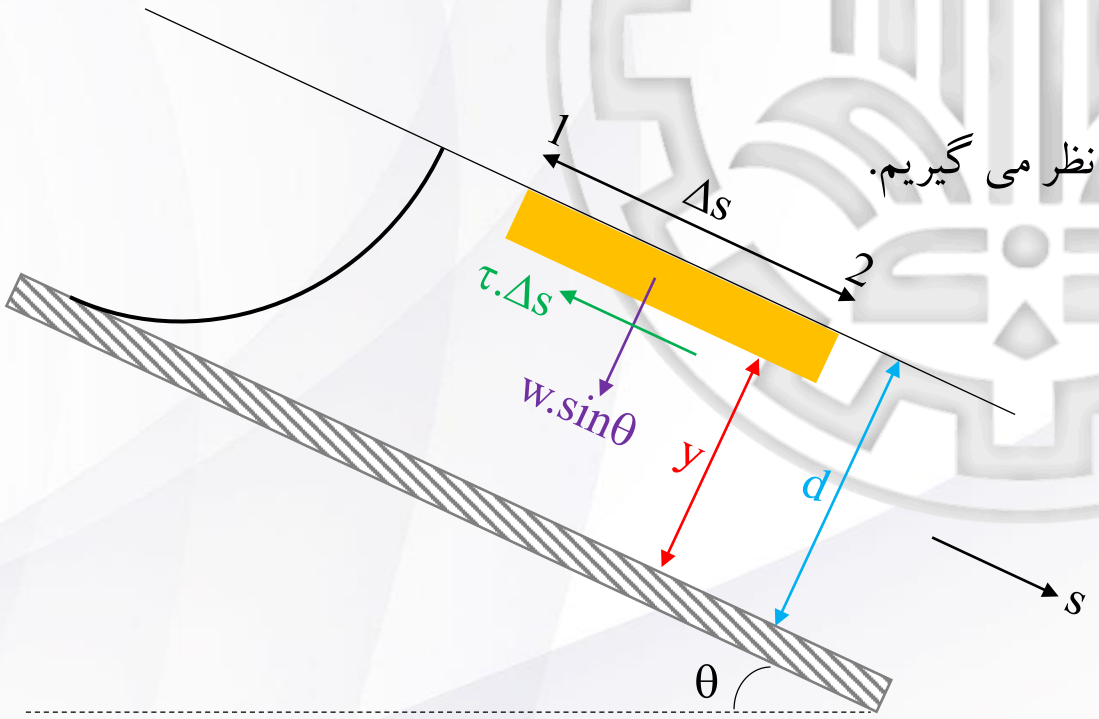
✓ جریان یکنواخت بر روی یک سطح شیب دار:

به منظور اینکه تنش یک طرف صفر شود، المان را روی سطح در نظر می گیریم.

در اینجا باید نیروی ناشی از وزن سیال در جهت حرکت برابر

نیروی ناشی از اصطکاک سیال در جهت عکس حرکت باشد.

لازم به ذکر است، عرض واحد در نظر گرفته شده است.



$$w.\sin\theta = \tau.\Delta s \times 1 \Rightarrow w.\sin\theta - \tau.\Delta s = 0 \quad \Rightarrow mg.\sin\theta - \tau.\Delta s = 0$$

$$\rho v.g.\sin\theta - \tau.\Delta s = 0 \;\Rightarrow \rho.(d-y)\Delta s.g.\sin\theta - \tau.\Delta s = 0$$

$$\gamma.(d-y)\Delta s.\sin\theta = \tau.\Delta s \quad \Rightarrow \boxed{\tau = \gamma.(d-y).\sin\theta}$$ توزیع تنش

دراینجا عدد رینولدز بحرانی برای جریان آرام 500 در نظر گرفته می شود. از طرفی داریم:

$$\tau = \mu.\frac{du}{dy} = \gamma.(d-y).\sin\theta \;\Rightarrow\; \frac{du}{dy} = \frac{\gamma}{\mu}(d-y).\sin\theta \;\Rightarrow\; u = -\frac{\gamma}{\mu}.\frac{(d-y)^2}{2}.\sin\theta + C$$

$$y = 0 \quad , \quad u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{\gamma}{\mu}.\frac{d^2}{2}.\sin\theta$$

$$u = \frac{\gamma}{2\mu}.y(2d-y).\sin\theta = \frac{g}{2\nu}.y(2d-y).\sin\theta$$ (ویسکوزیته سینماتیک ν) $\Rightarrow$ توزیع سرعت برای جریان یکنواخت و آرام

وقتی: $y = d \Rightarrow u = u_{max} \quad , u_{max} = \frac{g\sin\theta}{2\nu}(2d^2 - d^2) = \frac{g\sin\theta}{2\nu}d^2$

$$q = \int_0^d u\,dy = \int_0^d \frac{\gamma}{2\mu}\sin\theta\,\{(2dy - y^2)dy\} \;\Rightarrow\; \boxed{q = \frac{1}{3}.\frac{\gamma}{\mu}.d^3.\sin\theta}$$

$$\bar{u} = \frac{q}{A} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{\gamma}{\mu}.d^3.\sin\theta}{1 \times d} = \frac{1}{3}.\frac{\gamma}{\mu}.d^2.\sin\theta$$

اگر زاویه شیب کم باشد: $s_0 = \tan\theta$ شیب خط

$$\boxed{\bar{u} = \frac{1}{3}.\frac{\gamma}{\mu}.d^2.s_0}$$

مثال: نفت خام با دانسیته نسبی 0.92 و ویسکوزیته سینماتیکی $9.3 \times 10^{-5}\ m^2/s$ بر روی یک صفحه مسطح با شیب $s_0 = 2\ \%$ جریان دارد. الف) اگر عمق جریان 6 mm باشد، حداکثر سرعت و شدت جریان در واحد عرض صفحه چقدر است؟ ب) عدد رینولدز را نیز برای این وضعیت محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\sin\theta = s_0 \quad , \qquad y = d \Rightarrow u_{max} \quad , u_{max} = \frac{g}{2\nu}.y(2d-y).\sin\theta = \frac{g}{2\nu}.d^2.s_0 = 0.038\ \ m/s$$

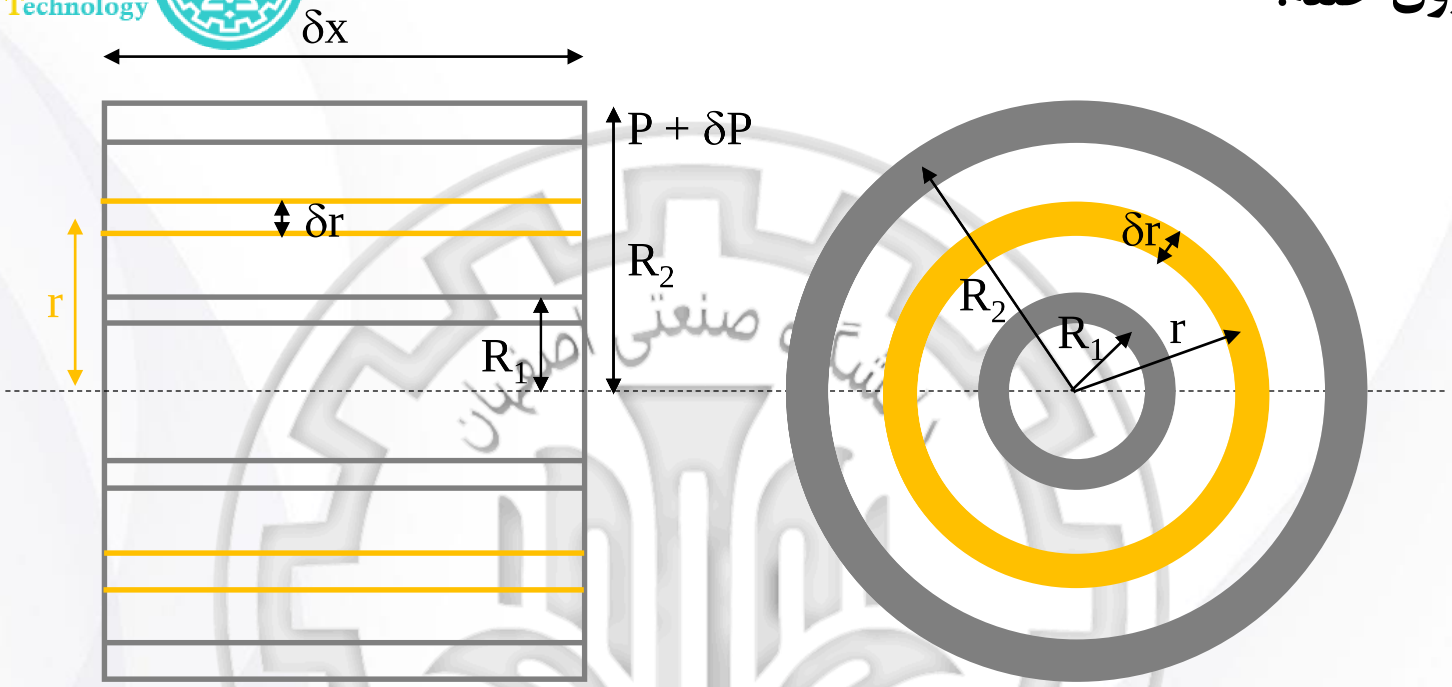
$$q = \frac{1}{3}.\frac{\gamma}{\mu}.d^3.\sin\theta = \frac{1}{3}.\frac{g}{\nu}.d^3.s_0 = 1.52 \times 10^{-4}\ \ m^3/s$$

ب) $$Re = \frac{\bar{v}d}{\nu} = \frac{0.0253 \times 6 \times 10^{-3}}{9.3 \times 10^{-6}} = 1.63 \ < \ 500 \Rightarrow$$ جریان آرام

$$\bar{v} = \frac{q}{A} = \frac{q}{1 \times d} = 0.0253\ \ m/s$$

با توجه به عدد رینولدز فرضیات صحیح است، ولی در حالت کلی ابتدا باید عدد رینولدز را بدست آورد و نوع جریان را مشخص کرد.

✓جریان آرام درون حلقه:



اگر narrow gap و فاصله کم باشد، می توان از تقریب دو سطح استفاده کرد و R_1 و R_2 با h جایگزین می شوند. زیرا سطح پیرامون تقریبا یکسان می شود:

$$\delta P = \delta x \times \frac{dP}{dx}$$

نیروی ناشی از اختلاف فشار = سطح مقطع حلقه $\times\ \delta P = 2\pi r.\delta r \times \delta x \times \dfrac{dP}{dx}$

نیروی ناشی از ویسکوز = سطح جانبی × تنش برشی = $2\pi r.\delta x \times \tau$

از طرفی داریم: $\tau = -\mu.\frac{dv}{dr}$

$$F = -2\pi r.\delta x \times (\mu.\frac{dv}{dr})$$

نرخ تغییر نیروی برشی با شعاع : $\frac{dF}{dr} = -2\pi\mu.\delta x \times \frac{d}{dr}(\frac{rdv}{dr})$

نیروی اصطکاک برای المان : $-2\pi\mu.\delta x \times \frac{d}{dr}(\frac{rdv}{dr})\delta r$

$$2\pi r.\delta r \times \delta x \times \frac{dP}{dx} - 2\pi\mu.\delta x \times \frac{d}{dr}(\frac{rdv}{dr})\delta r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(\frac{rdv}{dr})\delta r = \frac{1}{\mu}r.\frac{dP}{dx}$$

$$r.\frac{dv}{dr} = \frac{r^2}{2\mu}.\frac{dP}{dx} + A \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu}.\frac{dP}{dx} + \frac{A}{r} \Rightarrow v = \frac{r^2}{4\mu}.\frac{dP}{dx} + A\ln r + B$$

$$v = 0,\ r = R_1 \qquad \Rightarrow A\ln R_1 + B = -\frac{R_1^2}{4\mu}.\frac{dP}{dx}$$

$$v = 0,\ r = R_2 \qquad \Rightarrow A\ln R_2 + B = -\frac{R_2^2}{4\mu}.\frac{dP}{dx}$$

$$\Rightarrow A\,(\ln R_2 - \ln R_1) = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \Rightarrow A = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

سرعت بیشینه : $\frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{A}{r} = 0$

با جایگذاری A داریم:

$$\frac{r^2}{2\mu} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \cdot \frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{R_1^2}{2}\left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)$$

$$\boxed{r = R_1 \cdot \sqrt{\frac{a^2-1}{2\ln a}} \quad , \quad a = \frac{R_2}{R_1}}$$

لازم به ذکر است، اگر فاصله کم باشد، در رابطه قبلی به جای h، $(R_1 - R_2)$ قرار می گیرد و اثبات انجام می شود.

تکالیف:

۱) سیالی تحت شرایط آرام در یک لوله استوانه ای به قطر 2 cm جریان می یابد. افت فشار برابر 330 Pa، ویسکوزیته سیال 5 Pa.s و طول لوله برابر 300 cm است. سرعت متوسط و سرعت سیال را در شعاع های 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 cm به دست آورید.

۲) توزیع سرعت u بر حسب m/s با شعاع r بر حسب m در یک لوله با قطر 0.025 m از رابطه $u = 2.5 - kr^2$ تبعیت می کند. k مقداری ثابت است. جریان آرام و سرعت بر روی سطح درونی لوله صفر است. سیال دارای ضریب ویسکوزیته 0.00027 kg/m.s می باشد. مطلوب است: الف) نرخ جریان بر حسب m^3/s ب) نیروی برشی بین سیال و دیواره لوله به ازای متر طول لوله.

۳) الف) مایعی با ضریب ویسکوزیته m در یک لوله مدور با قطر d و سرعت متوسط u زیر سرعت بحرانی و تحت شرایط آرام جریان دارد. ثابت کنید کاهش فشار در طول لوله $\frac{32u.m}{d^2}$ است. ب) روغن با ویسکوزیته 0.05 kg/m.s درون یک لوله با قطر 0.1 m و سرعت 0.6 m/s جریان دارد. کاهش فشار در طول 120 m را محاسبه کنید.

۴) یک پیستون شناور با قطر 0.08 m و طول 0.13 m دارای چهار سوراخ ریز با قطر $\frac{5}{1600}$ m در راستای طولی می باشد. پیستون درون یک سیلندر حاوی روغن به راحتی حرکت می کند و به سیلندر چسبیده است. به طوری که فرض می شود روغن بین پیستون و سیلندر به هیچ عنوان حرکت نمی کند، به عبارتی لغزش ندارد. اگر پیستون در اثر وزن خود و با نیروی 45 N بطرف پایین حرکت کند و فرض شود جریان در جهت بالا، درون سوراخ های کوچک آرام باشد، سرعت سقوط پیستون را محاسبه کنید. ضریب ویسکوزیته روغن 0.2 kg/m.s است.

۵) سیالی با ویسکوزیته دینامیک 0.186 Pa.s و ویسکوزیته سینماتیک 1.29×10^{-4} m^2/s در یک لوله افقی به قطر 9 mm جریان دارد. افت فشار در واحد طول لوله 120 kPa/m است، دبی جریان و عدد رینولدز را بدست آورید. فرض کنید جریان آرام است.

۶) در لوله ای به قطر 300 mm و طول 120 m، آب با سرعت جریان حجمی $0.23\ m^3/s$ به صورت آرام در جریان است. اگر اتلاف انرژی در لوله معادل 3.81 m باشد، ضریب اصطکاک را بدست آورید.

۷) جریانی با سرعت 3 m/s در لوله ای به قطر 10 mm برقرار است. ارتفاع معادل افت فشار در هر کیلومتر طول لوله چقدر است. ویسکوزیته سینماتیک برابر $4 \times 10^{-5}\ m^2/s$ است.