دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مکانیک سیالات

استاد: دکتر علی زادهوش

اردیبهشت ۱۴۰۰

فصل هفتم: آنالیز ابعادی و تشابه دینامیکی

آنالیز ابعادی یک روش ریاضی مهندسی جهت کم کردن تعداد متغیرهای فیزیکی است. بعنوان مثال در یک لوله، جریان به فشار، قطر لوله، ویسکوزیته، اصطکاک، شدت جریان حجمی و ... بستگی دارد.

آنالیز ابعادی یا دیمانسیون، تجزیه و تحلیل ابعادی یک پدیده فیزیکی می باشد. به طور کلی، آنالیز ابعادی روشی است که به کمک آن می توان متغیرهای موثر در یک پدیده فیزیکی مانند حرکت یک سیال را به صورت کمترین متغیر بدون بعد دسته بندی کرد.

- ✓ کمیت های اصلی: جرم (M)، طول (L)، دما (t)، زمان (T)
- ✓ کمیت های فرعی: مساحت، حجم، شدت جریان حجمی، سرعت، شتاب، انرژی، نیرو، فرکانس، ویسکوزیته، دانسیته، وزن مخصوص و ...

✓ روش های آنالیز ابعادی:

۱) روش رایلی (Rayleigh method)

۲) روش باکینگهام (Buckingham, P-theorem)

در مدل سازی، باید مدل با نمونه اصلی تشابه ابعادی و دینامیکی داشته باشد تا بتوان اثراتی که روی مدل بررسی می شود را به نمونه واقعی تعمیم داد.

✓ **روش رایلی:** در این روش از یک معادله نمایی استفاده می شود. اگر یک پدیده فیزیکی را در نظر بگیریم و متغیر X باشد، گفته می شود که این X تابعی از سایر پارامترها است، به شرطی که هر دو طرف از لحاظ دیمانسیون همگن باشند:

$$X = C\,(X_1^a\, X_2^b\, X_3^c \ldots X_n^n)$$

اکنون باید پارامترهای مختلف را در پدیده شناسایی و بررسی کنیم و توان های معادله را بدست آوریم.

مثال: فرض کنید مقاومت وارد بر یک کره درون یک سیال (F_D) به قطر D، سرعت v و ویسکوزیته μ وابسته است.

حل:

$$F_D = C\,(D^a, v^b, \mu^c)$$

$$\frac{ML}{T^2} = C\,\{L^a, (\frac{L}{T})^b, (\frac{M}{L.T})^c\}$$

M: $c = 1$

L: $a + b - c = 1 \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = 1$

T: $-2 = -b - c \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow b = 1$

$$F_D = C\,(D^1, v^1, \mu^1) \Rightarrow F_D = CDv\mu$$

از تشابه دینامیکی C بدست می آید: $C = 3\pi$

$F_D = 3\pi\mu v D \Rightarrow$ قانون استوک

مثال: زمانی که یک پاندول نوسان می کند، وابسته به L است.

حل:

$T = f(L, g)$

$T = C(L^a, g^b)$

$T = C\{L^a, (\frac{L}{T^2})^b\} \Rightarrow T = C \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$

✓ **روش باکینگهام:** قضیه π باکینگهام بیان می کند، اگر تعداد متغیرهای یک پدیده فیزیکی m باشد، مانند (دانسیته، سرعت، فشار و...) و تعداد ابعاد اصلی متغیرها k باشد، مانند (جرم، طول، زمان و دما)، معادلات ربط دهنده متغیرها دارای $m - k$ گروه بی بعد می باشند. باکینگهام به این گروه ها، جمله های π می گوید.

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

مراحل انجام روش باکینگهام:

۱) شناسایی پارامترهای متغیر پدیده فیزیکی مانند: دانسیته، سرعت، ویسکوزیته و... (m)

۲) انتخاب یک سیستم ابعادی متغیر ← FLTt یا MLTt ⇐ باید دو طرف از نظر ابعادی همگن باشند.

۳) مشخص کردن ابعاد اصلی در پارامترهای متغیر (k)

۴) تعیین تعداد گروه های بدون بعد ← m – k : گروه بی بعد

۵) تعیین متغیرهای تکراری که دارای ابعاد اصلی هستند و به کار نبردن پارامترهایی که وابستگی آنها مورد بررسی در متغیرهای تکراری است.

۶) شناختن متغیرهای باقیمانده و ساختن جمله های π

مثال: نشان دهید که معادله افت فشار برای یک سیال درون لوله های مشابه هندسی به صورت زیر است:

$$P = \frac{\rho . l . v^2}{d} \varphi \left(\frac{vd\rho}{\mu}\right)$$

ρ: جرم مخصوص، l: طول اولیه، v: متوسط سرعت جریان، d: قطر لوله، μ: ویسکوزیته سیال، φ: تابعیت

حل: **روش باکینگهام:** روش اول:

$f(d, l, P, \mu, v, \rho) = 0 \Rightarrow m = 6$

$P = M L^{-1} T^{-2}$ $\quad \rho = M L^{-3}$ $\quad v = L T^{-1}$

$\mu = M L^{-1} T^{-1}$ $\quad d = L$ $\quad l = L$

$k = 3 \Rightarrow$ تعداد جمله های $\pi = m - k = 6 - 3 = 3$

گروه های بدون بعد:

$\pi_1 = P \rho^{a1} D^{b1} v^{c1}$

$\pi_2 = l \rho^{a2} D^{b2} v^{c2}$

$\pi_3 = \mu \rho^{a3} D^{b3} v^{c3}$

$\pi_1 : M^0 L^0 T^0 = M L^{-1} T^{-2} (M L^{-3})^{a1} (L)^{b1} (L T^{-1})^{c1} \Rightarrow \pi_1 = \frac{P D^0}{\rho v^2} = \frac{P}{\rho v^2}$

$M: 0 = 1 + a_1 \Rightarrow a_1 = -1$

$L: 0 = -1 - 3a_1 + b_1 + c_1 \Rightarrow b_1 = 0$

$T: 0 = -2 - c_1 \Rightarrow c_1 = -2$

π_2: $M^0\ L^0\ T^0 = L\ (M\ L^{-3})^{a2}\ (L)^{b2}\ (LT^{-1})^{c2} \Rightarrow \pi_2 = \frac{l}{D}$

M: $0 = a_2$

L: $0 = 1 - 3a_2 + b_2 + c_2 \Rightarrow b_2 = -1$

T: $0 = -c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

π_3: $M^0\ L^0\ T^0 = M\ L^{-1}\ T^{-1}\ (M\ L^{-3})^{a3}\ (L)^{b3}\ (LT^{-1})^{c3} \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu}{\rho v D}$

M: $0 = 1 + a_3 \Rightarrow a_3 = -1$

L: $0 = -1 - 3a_3 + b_3 + c_3 \Rightarrow b_3 = -1$

T: $0 = -1 - c_3 \Rightarrow c_3 = -1$

$\pi_1 = \pi_2\ \varphi\ (\pi_3)^{-1} \Rightarrow \frac{P}{\rho v^2} = \frac{l}{D}\ \varphi\ (\frac{\rho v D}{\mu})$ ، عدد رینولدز $= \frac{\rho v D}{\mu}$

روش دوم:

۱) متغیرها را براساس ابعاد خود مشخص می کنیم. ۲) متغیرهای باقیمانده را بر اساس ابعاد خود تعیین می کنیم و بر آنها تقسیم می کنیم.

۳) جایگزین کردن ابعاد در مخرج کسرها با متغیرهای تکراری.

(1): L, T, M (2): D, v, ρ

متغییرهای ردیف (۱) را بر حسب متغیرهای ردیف (۲) می نویسیم:

$$D = L \ , \ L = D$$

$$v = \frac{L}{T} \Rightarrow T = \frac{D}{v}$$

$$\rho = \frac{M}{L^3} \Rightarrow M = \rho D^3$$

متغیرهای باقیمانده: P، l، μ

باید متغیرهای باقیمانده را به ابعادشان تقسیم کنیم و ابعادش را با متغیرهای تکراری جایگزین کنیم:

$$\pi_1 = \frac{P}{ML^{-1}T^{-2}} = \frac{P}{\rho D^3 D^{-1} D^{-2} v^2} = \frac{P}{\rho v^2}$$

$$\pi_2 = \frac{l}{L} = \frac{l}{D}$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{ML^{-1}T^{-1}} = \frac{\mu}{\rho D^3 D^{-1} D^{-1} v} = \frac{\mu}{\rho D v}$$

عکس عدد رینولدز: $\frac{\mu}{\rho D v}$

حل مسئله به روش رایلی:

$$P = C\ \rho^a\ l^b\ v^c\ d^e\ \mu^f$$

$$M\ L^{-1}\ T^{-2} = M^a\ L^{-3a}\ L^b\ L^c\ T^{-c}\ L^e\ M^f\ L^{-f}\ T^{-f}$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

$$M: 1 = a + f \quad \Rightarrow \quad a = 1 - f \qquad (1)$$

$$L: -1 = -3a + b + c + e - f \qquad (2)$$

$$T: -2 = - c - f \qquad (3)$$

۳ معادله و ۳ مجهول، با حل معادلات در نهایت داریم:

$$P = C\, l^{b}\, \rho^{1-f}\, v^{2-f}\, d^{-f-b}\, \mu^{-f}$$

مثال: متغیرهای کنترل کننده حرکت یک ظرف شناور در آب عبارتند از: نیروی اصطکاک یا بازدارنده که با F، سرعت با v، طول با l، جرم مخصوص با ρ، ضریب ویسکوزیته دینامیک با μ و شتاب ثقل با g نشان می دهیم. معادله ای برای نیروی بازدارنده بدست آورید.

حل:

$$m = 6 \;,\; k = 3 \quad \Rightarrow m - k = 3$$

$F: M\, L\, T^{-2}$ $\qquad$ $v: L\, T^{-1}$ $\qquad$ $l: L$

$\rho: M\, L^{-3}$ $\qquad$ $\mu: M\, L^{-1}\, T^{-1}$ $\qquad$ $g: L\, T^{-2}$

چون هدف، نوشتن معادله برای نیرو است، نباید در متغیرهای تکراری نیرو وجود داشته باشد.

$\pi_1: \rho^{a1}\, l^{b1}\, v^{c1}\; F$ $\qquad$ $\pi_2: \rho^{a2}\, l^{b2}\, v^{c2}\; \mu$ $\qquad$ $\pi_3: \rho^{a3}\, l^{b3}\, v^{c3}\; g$

F، μ و g متغیرهای باقیمانده و ρ، l و v متغیرهای تکراری هستند.

$\pi_1: M^0 L^0 T^0 = M^{a1} L^{-3a1} L^{b1} L^{c1} T^{-c1} M L T^{-2} \Rightarrow \pi_1: \rho^{-1} l^{-2} v^{-2} F = \frac{F}{\rho l^2 v^2}$

$M: a_1 = 0 + 1 \Rightarrow a_1 = -1$

$L: 0 = -3a_1 + b_1 + c_1 + 1 \Rightarrow b_1 = -2$

$T: 0 = -c_1 - 2 \Rightarrow c_1 = -2$

$\pi_2: M^0 L^0 T^0 = M^{a2} L^{-3a2} L^{b2} L^{c2} T^{-c2} M L^{-1} T^{-1} \Rightarrow \pi_2: \rho^{-1} l^{-1} v^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho l v}$

$M: 0 = a_2 + 1 \Rightarrow a_2 = -1$

$L: 0 = -3a_2 + b_2 + c_2 - 1 \Rightarrow b_2 = -1$

$T: 0 = -c_2 - 1 \Rightarrow c_2 = -1$

$\pi_3: M^0 L^0 T^0 = M^{a3} L^{-3a3} L^{b3} L^{c3} T^{-c3} L T^{-2} \Rightarrow \pi_3: \rho^0 l^1 v^{-2} g = \frac{lg}{v^2}$

$M: 0 = a_3$

$L: 0 = -3a_3 + b_3 + c_3 + 1 \Rightarrow b_3 = 1$

$T: 0 = -c_3 - 2 \Rightarrow c_3 = -2$

$$\pi_1 = \pi_2\ \varphi\ (\pi_3)^{-1} \Rightarrow \frac{F}{\rho l^2 v^2} = \frac{\mu}{\rho l v}\ \varphi\ \left(\frac{v^2}{lg}\right)$$

✓ **مدل سازی (تشابه هندسی و تشابه دینامیکی):** فرض کنید متغیرهای پدیده فیزیکی مشخص هستند. در آزمایشگاه باید مدلی شبیه سازی شود که آزمایش را بتوان بر روی آن انجام داد و در مرحله بعدی، با روش افزایش مقیاس نتایج به نمونه اصلی تعمیم داده شوند. پس مدل باید هم تشابه هندسی (ظاهری) و هم تشابه نیروهای وارد بر آن را با نمونه اصلی داشته باشد.

✓ **تشابه هندسی:** هنگامی در دو سیستم تشابه هندسی وجود دارد که نسبت میان طول های مربوطه در دو سیستم ثابت باشد. به طوری که یک مدل مقیاسی از دیگری باشد.

✓ **تشابه دینامیکی:** در مباحث دینامیک همیشه یک نیروی پیش برنده و یک نیروی بازدارنده وجود دارند. مثلا در یک لوله، فشار نیروی پیش برنده و نیروهای اصطکاک با جداره، بازدارنده هستند. در جریان سیال نیروی پیش برنده، نیروی اینرسی است. برای برقراری تشابه دینامیکی باید نیروی پیش برنده و بازدارنده در مدل و نمونه اصلی مشابه باشند. به عبارتی، دو سیستم وقتی تشابه دینامیکی دارند که نسبت نیروهای موثر بر یکدیگر بر روی عناصری از سیال مربوطه در دو سیستم یکسان باشد. به طوری که مسیر طی شده به وسیله عناصری از سیال در دو سیستم دارای تشابه دینامیکی هستند که رفتار ذره در حال حرکت به اینرسی آن وابسته است، که سعی دارد آن را با سرعت یکنواخت در خط مستقیم سوق دهد و نیروی مقاوم حرکت سعی دارد در مقابل جریان مقاومت ایجاد کند. اگر نسبت نیروی پیش برنده به نیروی مقاوم

در دو سیستم یکسان باشد، این حرکت دارای تشابه دینامیکی است.

تشابه دینامیکی در حرکت با در نظر گرفتن نیروهای بازدارنده:

۱) نیروی ویسکوز

۲) نیروی موج

۳) تراکم پذیری

۴) کشش سطحی

و نیروی اینرسی که پیش برنده است، صورت می گیرد.

✓ **نیروی اینرسی:** فرض کنید L مشخصه طول در یک سیستم، T زمان و ρ دانسیته باشد، داریم:

جرم هر عنصر : ρl^3

شتاب : $\frac{l}{T^2}$

$$\text{نیروی اینرسی} \propto \text{جرم} \times \text{شتاب} \propto \rho l^3 \times \frac{l}{T^2} \propto \rho l^2 \times (\frac{l}{T})^2 = \rho l^2 v^2$$

✓ **مقاومت ویسکوز:** اگر در یک حرکت نیروی پیش برنده، نیروی اینرسی و نیروی بازدارنده، نیروی ویسکوز باشد، طبق آنچه گفته شد لازمه تشابه دینامیکی تساوی نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز است.

$$\text{نیروی ویسکوز} \propto \text{تنش برشی ویسکوز} \times \text{سطح} \propto \mu \times \frac{v}{l} \times l^2 \propto \mu v l$$

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} \propto \frac{\rho v^2 l^2}{\mu v l} = \frac{\rho v l}{\mu} \rightarrow \text{عدد بدون بعد رینولدز}$$

نتیجه گیری: بنابراین لازمه تشابه دینامیکی در دو حرکت که توسط نیروی ویسکوز کنترل می شود، تساوی عدد رینولدز است.

✓ **مقاومت موج:** همان نیروی ثقل است.

$$\text{نیروی ثقل} \propto \text{جرم} \times \text{شتاب ثقل} \propto \rho l^3 \times g$$

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ثقل}} \propto \frac{\rho v^2 l^2}{\rho l^3 g} \propto \frac{v}{\sqrt{lg}} \rightarrow \text{عدد بدون بعد فرود}$$

نتیجه گیری: بنابراین لازمه تشابه دینامیکی در دو حرکت که توسط نیروی موج کنترل می شود، تساوی عدد فرود است.

✓ **تراکم پذیری:** تراکم الاستیک سیال وابسته به مدول بالک سیال است، بنابراین داریم:

$$\text{نیروی الاستیک} \propto kl^2$$

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی الاستیک}} \propto \frac{\rho v^2 l^2}{kl^2} \propto \frac{v}{\sqrt{\frac{k}{\rho}}} \quad \rightarrow \quad \text{عدد بدون بعد ماخ}$$

نتیجه گیری: بنابراین لازمه تشابه دینامیکی در دو حرکت که به وسیله نیروی تراکم پذیری کنترل می شود، تساوی عدد ماخ می باشد.

✓ **کشش سطحی:**

$$\text{نیروی کشش سطحی} \propto Tl$$

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}} \propto \frac{\rho l^2 v^2}{Tl} \propto \frac{\rho l v^2}{T} \quad \rightarrow \quad \text{عدد بدون بعد وبر}$$

نتیجه گیری: بنابراین لازمه تشابه دینامیکی در دو حرکت که توسط نیروی کشش سطحی کنترل می شود، تساوی عدد وبر است.

مثال: یک کره با ابعاد مشخصی وقتی درون آب با سرعت 1.5 m/s قرار گیرد، نیروی اصطکاکی معادل 4.5 N بر روی آن وارد می شود.

یک کره دیگر با ابعاد دو برابر درون یک تونل باد قرار می گیرد. چه نیروی اصطکاکی بر روی آن در این سرعت وارد می شود. اگر ویسکوزیته سینماتیک هوا 13 برابر آب باشد و دانسیته هوا $1.28\ kg/m^3$ باشد. از طریق آنالیز ابعادی ثابت شده:

$F = \rho\, v^2\, d^2$ و تابعی از $\frac{vd}{\nu}$ است. (v: سرعت d: قطر ν: ویسکوزیته سینماتیک $\frac{vd}{\nu}$: عدد بدون بعد رینولدز)

حل: برای اینکه تشابه دینامیکی وجود داشته باشد، باید تساوی عدد رینولدز برقرار باشد:

$$\frac{v_a d_a}{\nu_a} = \frac{v_w d_w}{\nu_w} \quad \Rightarrow \quad v_a = v_w \cdot \frac{d_w}{d_a} \cdot \frac{\nu_a}{\nu_w} = 1.5 \times 0.5 \times 13 = 9.75 \ \ m/s$$

$$\frac{F_a}{F_w} = \frac{\rho_a v_a^2 d_a^2}{\rho_w v_w^2 d_w^2} = \frac{1.28}{1000} \times \left(\frac{9.75}{1.5}\right)^2 \times 2^2 = 0.97 \quad N$$

مثال: افت فشار اندازه گیری شده برای جریان آب با سرعت $0.6\ m/s$ درون یک لوله با قطر $50\ mm$ برابر با ارتفاع معادل $800\ mm$ آب برای هر $100\ m$ طول می باشد. افت فشار بر حسب mm آب برای طول $400\ m$ جریان هوا درون یک لوله با قطر $200\ mm$ و با سرعت لازم را محاسبه کنید. فرض کنید، زبری سطح دو لوله شبیه هم باشد و جرم مخصوص هوا و آب، $1.23\ kg/m^3$ و $1000\ kg/m^3$ و ویسکوزیته دینامیک آنها، $1.8 \times 10^{-4}\ P$ و $1.2 \times 10^{-2}\ P$ باشد.

$$P = \frac{\rho l v^2}{d}\, \varphi\left(\frac{\rho v d}{\mu}\right)$$

حل:

$$\frac{\rho_a v_a d_a}{\mu_a} = \frac{\rho_w v_w d_w}{\mu_w} \Rightarrow v_a = \frac{\rho_w v_w d_w \mu_a}{\rho_a d_a \mu_w} = \frac{1000 \times 0.6 \times 0.05 \times 1.8 \times 10^{-4}}{1.23 \times 0.2 \times 1.2 \times 10^{-2}} = 1.83 \text{ m/s}$$

$$\frac{P_a}{P_w} = \frac{\frac{\rho_a l_a v_a^2}{d_a}}{\frac{\rho_w l_w v_w^2}{d_w}} = \frac{\frac{1.23 \times 400 \times 1.83^2}{0.2}}{\frac{1000 \times 100 \times 0.6^2}{0.05}} = 0.0114 \Rightarrow P_a = 7848 \times 0.0114 = 89.46 \text{ N}$$

$$P_w = \rho g h = 1000 \times 9.81 \times 0.8 = 7848 \text{ N}$$

$$ha = \frac{P_a}{\rho g} = \frac{89.46}{1.23 \times 9.81} = 7.414 = 0.0074 \text{ mm}$$

تکالیف:

۱) کمیت های زیر را به صورت پارامترهای بدون بعد بنویسید.

الف) ΔP، ρ، u و L.

ب) ρ، g، u و F

ج) a، L و T

د) ν، L و T

۲) فرض کنید شدت جریان حجمی درون یک لوله موئین افقی به افت فشار در واحد طول، قطر و ویسکوزیته دینامیک بستگی داشته باشد. شکل رابطه را با استفاده از آنالیز ابعادی بدست آورید.

۳) اگر شدت جریان تخلیه Q از طریق اوریفیس متر تابعی از d: قطر، ΔP: اختلاف فشار، ρ: دانسیته و μ: ویسکوزیته باشد. نشان دهید :

$$Q = C \frac{P^{0.5} d^2}{\rho^{0.5}}$$

است که در آن C تابعی از گروه بدون بعد $\frac{d\rho^{0.5} d^{0.5}}{\mu}$ می باشد.

۴) الف) اگر مقاومت در برابر حرکت (R) یک جسم کروی درون یک سیال تابعی از دانسیته (ρ)، ویسکوزیته (μ)، شعاع جسم کروی (r)

و سرعت کره (u) باشد، نشان دهید R توسط رابطه زیر تعیین می شود:

$$R = \frac{\mu^2}{\rho} f\left(\frac{\rho u r}{\mu}\right)$$

از اینرو نشان دهید که برای سرعت های بسیار پائین، مقاومت (R) متناسب با سرعت (u) است بنابراین $R = k\mu r u$ که در آن k یک ثابت بی بعد است.

ب) یک ترکیب گرانولی دارای ذرات ریز با وزن مخصوص 2.5 در سوسپانسیون یکنواخت درون آب با عمق 3.3 m قرار دارد. با توجه به اینکه ذرات به صورت کروی و با قطر 0.002 cm باشد، چه مدت برای آب طول می کشد تا خالی شود. $k = 6\pi$ و $\mu = 0.0013$ kg/m.s در نظر بگیرید.

۵) در یک نقطه از مدل یک کشتی، سرعت مدل 3 m/s است. نسبت ابعاد نمونه اصلی به مدل 15 برابر است. در شرایط مشابه، سرعت نمونه در نقطه متناظر را بیابید.

۶) گاز با $\nu = 5 \times 10^{-6}$ m^2/s و با سرعت $u = 25$ m/s در یک لوله به قطر 1.2 m جریان دارد. قرار است با انجام آزمایش بر روی آب با $\nu = 1.007 \times 10^{-6}$ m^2/s بر روی مدل تلفات در یک سه راهی تعیین شود. در آزمایشگاه می توان دبی حجمی 75 Lit/s تامین کرد. مدل را باید با چه مقیاسی ساخت؟

۷) قرار است مدلی به مقیاس 1:5 از سیستم لوله کشی یک دستگاه پمپاژ مورد آزمایش قرار گیرد تا کل افت ارتفاع تعیین شود. هوا دارای $\nu = 1.688 \times 10^{-5}$ m^2/s است. سرعت نمونه در یک مقطع به قطر 4 m برابر 500 mm/s است. آب دارای $\nu = 1.141 \times 10^{-6}$ m^2/s است. مطلوب است محاسبه سرعت هوا و دبی لازم آن؟