دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مكانيك سيالات

استاد: دکتر علی زادهوش

زمستان ۹۹

فصل دوم: استاتیک سیالات

✓ **تعریف استاتیک سیالات:**

نحوه تغییرات فشار در سیالات تحت شرایطی که ذرات سیالات، نسبت به هم حرکتی نداشته باشند.

✓ **سیالات در حال سکون:**

سیالات به طور کلی نوعی از مواد هستند که تحمل هیچ‌گونه تنش برشی را ندارند و اگر تنش برشی به آنها اعمال شود به حرکت واداشته می شوند. لذا سیال در حال سکون یعنی هیچ گونه نیرو (تنش) برشی به آن اعمال نشده است یعنی تمام نیروها عمود بر هم هستند و لذا در سیالات در حال سکون، F همان F_N می باشد و لذا داریم:

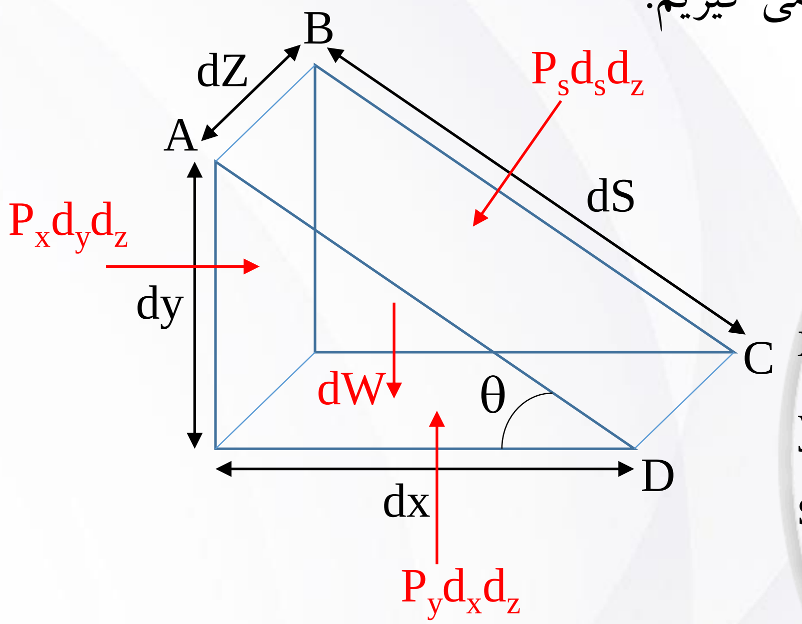
$$P = \frac{F}{A}, \quad P = \frac{\delta F}{\delta A} \Rightarrow \boxed{\frac{dF}{dA} = \text{فشار در یک نقطه}}$$

$$\delta A \rightarrow 0$$

✓ **نتیجه:** وقتی می‌گویم که سیالی حرکت ندارد و ساکن است، یعنی تنش برشی نداریم و همه تنش ها و نیروها عمود بر هم هستند و به این نیروهای عمود، نیروهای هیدرو استاتیک گفته می شود.

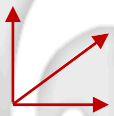
✓ قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه:

فشار در هر نقطه داخل سیال بدون حرکت، در تمامی جهات یکسان است. از نظر ریاضی یعنی یک مقدار عددی است. (کمیت عددی است نه برداری) و لذا فشار هیچ جهتی ندارد. برای اثبات، یک المانی از سیال را به صورت منشور در نظر می گیریم:



نیروهای مختلف در راستاهای مختلف به المان وارد می شوند. (نیروهای به رنگ قرمز)

اگر فشار ها را در راستای x با P_x، در راستای y با P_y و در راستای عمود بر سطح ABCD با P_S مشخص کنیم، داریم:



x: $P_x.dz.dy$

y: $P_y.dx.dz$

s: $P_s.dz.ds$

نیروی وزن جسم هم می‌تواند وارد شود که dW می باشد:

$$x:\ P_x.dz.dy - P_s.ds.dz.\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$y:\ P_y.dx.dz - P_s.ds.dz.\cos\theta - dW = 0 \qquad (2)$$

$$dW = \gamma.dV = \rho g\left(\frac{dx.dy.dz}{2}\right) \qquad (3)$$

$$\cos\theta = dx/ds \qquad (4) \quad , \quad \sin\theta = dy/ds \qquad (5)$$

بعد از جایگزینی و مرتب کردن روابط داریم:

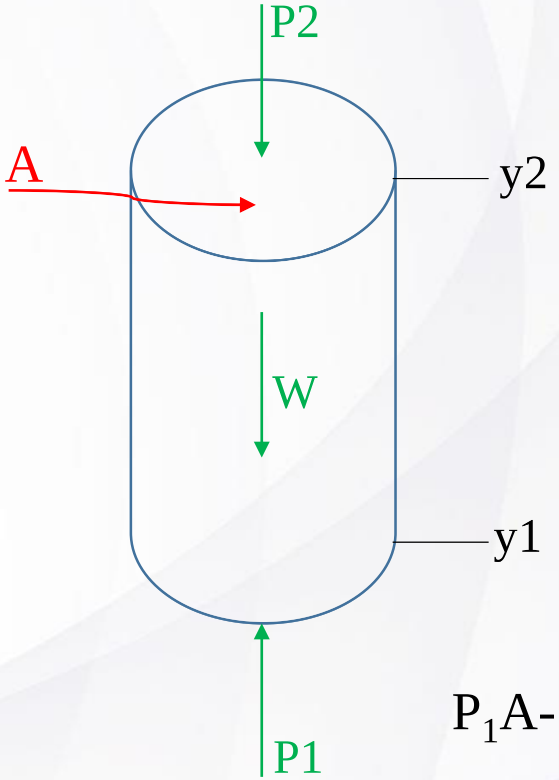
$$P_x = P_s \quad , \quad P_y = \gamma \cdot \frac{dy}{2} + P_s$$

وقتی اندازه المانی به قدری کوچک شود که به یک نقطه تبدیل شود، جمله $(\gamma \cdot \frac{dy}{2})$ صفر شده و بنابراین $P_s = P_y$ خواهد شد. بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$\boxed{P_x = P_y = P_s}$$

✓ **تغییرات فشار با ارتفاع:**

یک المان به صورت استوانه ای از سیال را در نظر بگیرید به صورت زیر:



سطح مقطع المان در دو طرف A می باشد. سیال دارای جرم مخصوص ρ است و نیرویی که در سطح y2 و y1 بر سطح المان وارد می شود به صورت زیر است:

نیروی ناشی از از فشار P_1: $P_1.A$ و نیروی ناشی از فشار P_2: $P_2.A$

نیروی حاصل از وزن سیال:

$$mg = \rho V g = \rho A\,(y_2 - y_1) g$$

پس در حالت سکون، مجموع نیروهایی که وارد می‌شود، صفر است (در حالت تعادل):

$$P_1A - P_2A - \rho A\,(y_2 - y_1)g = 0 \Rightarrow P_2 - P_1 = -\rho(y_2 - y_1)g$$

یعنی با افزایش ارتفاع، فشار کاهش پیدا می کند به عبارت دیگر از نظر ریاضی:

$$\frac{dP}{dy} = -\gamma \Rightarrow \int dP = -\rho g \int dy$$

فرض مایعی داریم که سطح آن در ارتفاع y_0 می باشد و از P_{atm} به P رسیده ایم و لذا داریم:

$$\int_{Patm}^{P} dP = -\rho g \int_{y0}^{y} dy \Rightarrow P - P_{atm} = -\rho g\,(y - y_0) \Rightarrow P = P_{atm} + \rho g\,(y_0 - y)$$

اگر به جای $(y_0 - y)$، h را قرار دهیم داریم:

$$\boxed{P = P_{atm} + \rho g h}$$

مثال: یک غواص به عمق $30\ m$ در دریا فرو رفته. اختلاف فشار با سطح آب به روی این غواص را به دست آورید. $\rho = 1025\ kg/m^3$

حل:

$$P - P_0 = 1025 \times 0.001 \times 9.8 \times 30 = 301.35\ Pa$$

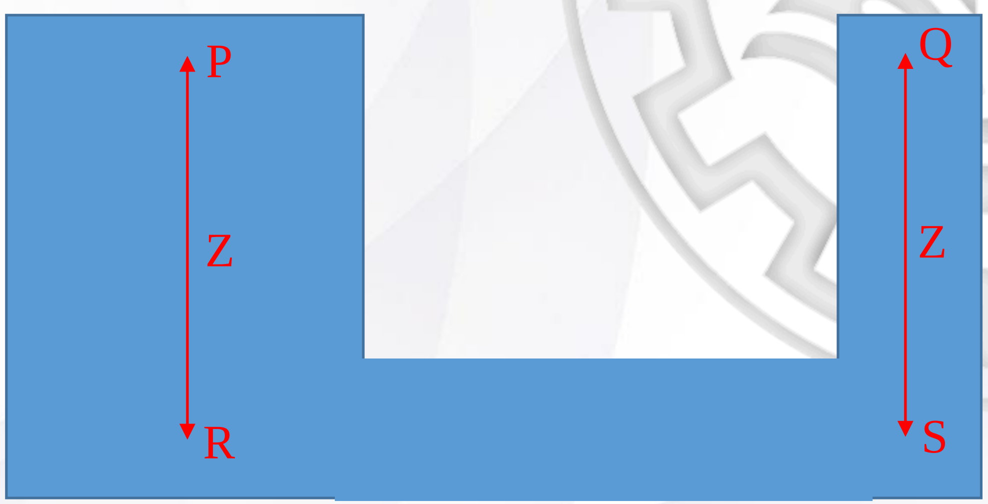
یک المان افقی به صورت استوانه در نظر می گیریم و اثبات می کنیم که فشار در یک سطح مشخص یکسان است:

$$P_1.A = P_2.A \Rightarrow \boxed{P_1 = P_2}$$

اگر یک سطح در نظر گرفته شود:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \,,\, \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

نتیجه گیری: قانون ظروف مرتبطه، فشار در یک سیال ساکن، بستگی به ارتفاع سیال از سطح دارد و در یک ارتفاع ثابت، اگر سیال ها هم سطح باشند، فشارها یکسان می باشد.



$$P_R = P_S$$

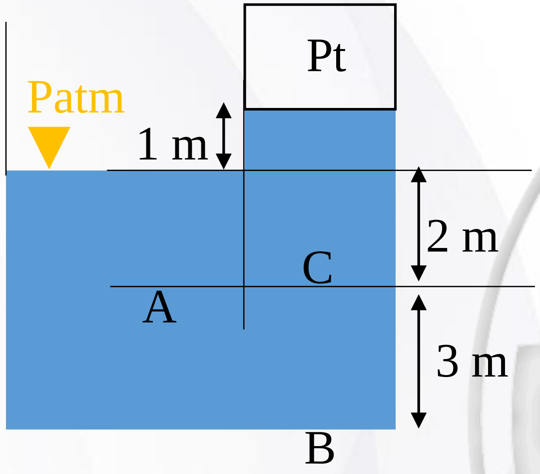
$$P_R = P_P + \rho g Z$$

$$P_S = P_Q + \rho g Z$$

$$P_Q = P_P$$

مثال: یک مخزن روغن از یک سو به جو باز بوده و از سوی دیگر طبق شکل به ظرف سربسته متصل می باشد.

اگر چگالی روغن 0.9 باشد، فشار نسبی در نقاط A، B، C و P_t را محاسبه کنید.



حل:

$$P_A = \rho gh = 0.9 \times 1000 \times 9.81 \times 2 = 17658 \text{ Pa}$$

$$P_B = P_A + \rho gh = 17658 + 900 \times 9.81 \times 3 = 44118 \text{ Pa}$$

$$P_C = P_A$$

$$P_t = P_C - \rho gh = 17658 - 9.81 \times 3 \times 900 = - 8829 \text{ Pa}$$

✓ **ارتفاع معادل فشار: (Pressure Head)**

$$\boxed{P = \rho gh \Rightarrow h = \frac{P}{\rho g}}$$

مثال: در محلی فشار جو برابر با 101 kPa است. ارتفاع معادل فشار مطلق 200 kPa را بر حسب ارتفاع آب و جیوه حساب کنید. ارتفاع معادل فشار نسبی بر حسب ارتفاع آب چقدر است؟ آب: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ و جیوه: $\gamma = 13.55$

حل:

آب $h = P/\rho g = 200000/1000 \times 9.81 = 20.39\ m$

جیوه $h = 200000/1000 \times 13.55 \times 9.81 = 1.5\ m$

نسبی $P =$ مطلق $P - P_{atm} \Rightarrow 200 - 101 = 99\ kPa$

آب $h = 99 \times 1000 / 1000 \times 9.81 = 10.1\ m$

مثال: فشار حاصل از $100\ m$ آب برابر فشار حاصل از چند متر از سیالات زیر است: الف) روغن با $\gamma = 0.81$ ب) تتراکلرید کربن با $\gamma = 1.6$

حل:

$100 = P/1000 \times 9.81 \Rightarrow P = 981000\ Pa$

روغن $h = 981000/1000 \times 0.81 \times 9.81 \Rightarrow h = 123.46\ m$

تترا کلرید کربن $h = 981000/1000 \times 1.6 \times 9.81 \Rightarrow h = 62.5\ m$

✓ تغییر فشار گازها با ارتفاع:

فشار برای مایع ثابت و برای گاز ها متغیر است.

در حالت ایزوترمال، دانسیته تغییر می کند. $P = \rho gh\ ,\ \ PV = mRT \Rightarrow P = \frac{m}{V}RT \Rightarrow P = \rho RT \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{P}{RT}} \Rightarrow$

در حالت کلی:

$$\int dP = -\rho g \int dy = -\int \frac{Pg}{RT}dy$$

اکنون باید تغییرات دما با ارتفاع را مشخص کنیم. بدین منظور جو استاندارد را تعریف کرده‌اند. در ارتفاع ۱۱ کیلومتری نسبت به سطح دریا، یک رابطه خطی میان T و y وجود دارد. ($y = 0\text{-}11\ km$) یعنی تغییر دما به ازای هر یک متر برابر با $0.0065\ ^\circ$ می باشد. پس داریم:

$$T = T_0 + \alpha y$$

در بخش دوم گفته می شود که از 11 km سطح دریا تا 20 km دما ثابت است و پس برای این دو حالت یک رابطه بدست می آید:

✓ **حالت اول:** هنگامی که درجه حرارت با ارتفاع به صورت خطی تغییر می کند:

$$\boxed{T = T_0 + \alpha y}$$

$$= -\,g/R \int_{y1}^{y} \frac{dy}{T0+\alpha y} \Rightarrow \ln P/P_1 = -\,g/R\,(1/\alpha\ .\ \mathrm{Ln}\frac{T0+\alpha y}{T0+\alpha y1}) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Ln}\ P/P_1 = -g/\alpha R\ .\ \mathrm{Ln}\frac{T0+\alpha y}{T0+\alpha y1} \Rightarrow \boxed{P = P_1\,.\,(\frac{T0+\alpha y}{T0+\alpha y1})^{-g/\alpha R}}$$

✓ **حالت دوم:** هنگامی که درجه حرارت ثابت باشد (حالت ایزوترمال):

$$\int_{P1}^{P} dP/P\ - = g/RT \int_{y1}^{y} dy \Rightarrow \ln P_1/P = -\,g/RT\,(y - y_1) \Rightarrow \boxed{P = P_1\,e^{\frac{-g\,(y-y1)}{RT}}}$$

برای دانسیته هم می توان یک چنین رابطه ای را به دست آورد:

$$P = \rho RT$$

$$\rho RT = \rho_1.RT.\exp\,(\frac{-g\,(y-y1)}{RT}) \Rightarrow \rho = \rho_1.\exp\,(\frac{-g\,(y-y1)}{RT}) \Rightarrow \boxed{\rho = \rho_1.\ \exp\,(\frac{-\rho 1.g\,(y-y1)}{P1})}$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

مثال: فرض کنید که دمای اتمسفر با افزایش ارتفاع کاهش پیدا می کند و نرخ آن به صورت $6.5\ ^{\circ}$ به ازای هر $1000\ m$ می باشد فشار و جرم مخصوص را در ارتفاع $7000\ m$ به دست آورید. فشار اتمسفر در سطح دریا $101\ kPa$ می باشد و جرم مخصوص $1.235\ kg/m^3$ است و دما 15 درجه سانتی گراد می‌باشد. $R = 287\ J.kg^{-1}.K^{-1}$

حل:

$$T = T_0 + \alpha y = 288 - 0.0065y$$

$$P = P_1 \cdot \left(\frac{T0+\alpha y}{T0+\alpha y1}\right)^{-g/\alpha R} = 101 \times 10^3 \left(\frac{288 - 0.0065 \times 7000}{288}\right)^{-\frac{9.81}{-0.0065 \times 287}} \Rightarrow P = 40.89\ kPa$$

$$\rho = \rho_1 . \exp\left(\frac{-\rho 1.g\ (y-y1)}{P1}\right) = 1.235\ e^{-\frac{1.235 \times 9.81\ (7000-0)}{101000}}$$

مثال: یک سیاره در سطح دریا دارای دمای 15 درجه و فشار $101\ kPa$ است. برای هر $500\ m$ ارتفاع یک درجه سانتیگراد افت می کند. ثابت گاز برای این محیط $220\ \ J.kg^{-1}.K^{-1}$ می باشد. در چه ارتفاعی فشار به اندازه 40 درصد فشار سطح دریا می شود؟

حل:

$\alpha = 1/500 = 0.002\,°$, $P_1 = 101$ kPa, $P = 0.4 \times 101 = 40.4$ kPa , $T = 15+ 273 = 288$ °C

$$P = P_1 \,.\, \left(\frac{T0+\alpha y}{T0+\alpha y1}\right)^{-g/\alpha R} \Rightarrow 40.4 \times 1000 = 101 \times 1000 \left(\frac{288+0.002\,y}{288}\right)^{\frac{-9.81}{-0.002 \times 220}} \Rightarrow y = 5800 \text{ m}$$

✓شرایط آدیاباتیک:

$P v^{\gamma} = C =$ ثابت

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = C \Rightarrow \rho^{\gamma} = \frac{P}{C} \Rightarrow \rho = \left(\frac{P}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$dP = -\rho g dy = -\left(\frac{P}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} gdz \Rightarrow dP/\left(\frac{P}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = -gdz \Rightarrow C^{1/\gamma}.\, dP/\rho^{1/\gamma} = -gdz \Rightarrow C^{1/\gamma}.\rho^{-1/\gamma} dP = -g.dz$$

پس از انتگرال گیری داریم:

$$\int_{P0}^{P} C^{1/\gamma} \rho^{-1/\gamma} .\, dP = -g \int_{y0}^{y} dy \Rightarrow \boxed{P = P_0 \,.\, \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \,.\, \frac{g.y}{RT0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

مثال: مطلوب است محاسبه فشار، درجه حرارت و دانسیته در ارتفاع 1200 m و در ارتفاع صفر درجه حرارت 15 درجه است و فشار 101 kPa می باشد. شرایط مسئله را با حالت آدیاباتیک برای $R= 287\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ و $\gamma = 1.4$ به دست آورید.

حل:

$$P = P_0 \cdot \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{g.z}{RT0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow P = 101 \cdot \left(1 - \frac{1.4 - 1}{1.4} \cdot \frac{9.81 \times 1200}{287 \times 288}\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} \Rightarrow P = 87.264\ kPa$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho 1} = \frac{P.T1}{P1.T} \Rightarrow \frac{P}{P1} = \left(\frac{\rho}{\rho 1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P.T1}{P1.T}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{P.P1^{\gamma}}{P1.P^{\gamma}} = \left(\frac{T1}{T}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{P^{1-\gamma}}{P1^{1-\gamma}} = \left(\frac{T1}{T}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{P}{P1} = \left(\frac{T1}{T}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$\frac{dP}{dT} = P_1 \times T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \times \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \times T^{\frac{-1}{1-\gamma}},\ \frac{dP}{dy} = -\rho g \Rightarrow dy = \frac{dP}{-\rho g}$$

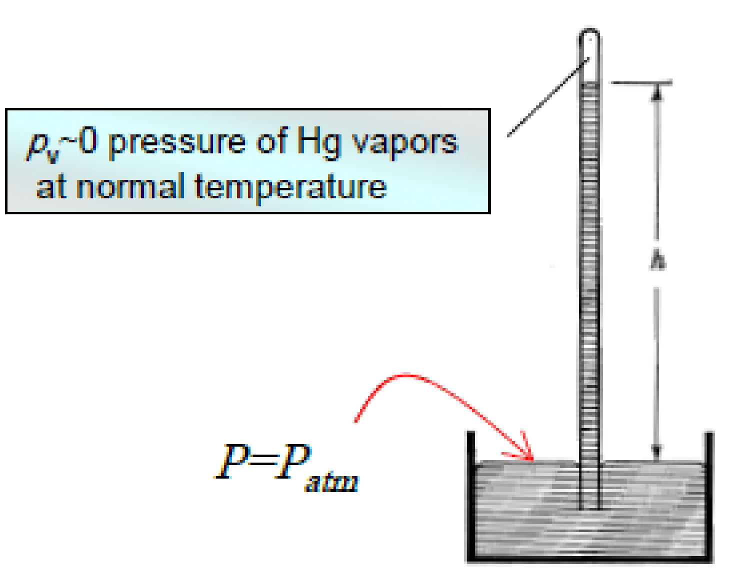
$$dy = -\left(\frac{RT}{\rho g}\right).dP \Rightarrow \frac{dT}{dy} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \times \frac{g}{R} = -\frac{1.4 - 1}{1.4} \times \frac{9.81}{287} = -9.77 \times 10^{-3}$$

$$T - T_1 = -9.77 \times 10^{-3}(y - y_1) \Rightarrow T = 276.3\ K\ ,\ \rho = \frac{P}{RT} = 1.101\ kg/m^3$$

✓ اندازه گیری فشار:

۱) مانومتر: مانومترها وسایلی هستند که با توجه به ستون های مایعات اختلاف فشار را نشان می دهند.

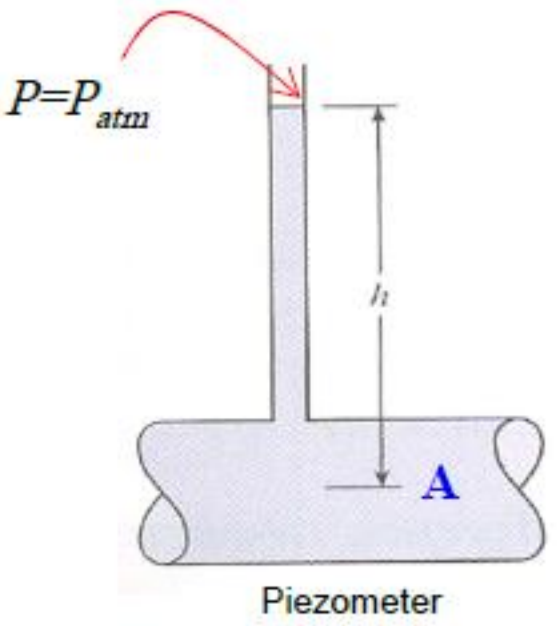
۲) بارومتر: بارومتر جیوه ای برای تعیین فشار مطلق هوا استفاده می شود. در بارومتر انتهای لوله بسته بوده، از هوا تخلیه شده و آب بندی می شود.



$$P_V = 0$$

$$P_A = P_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

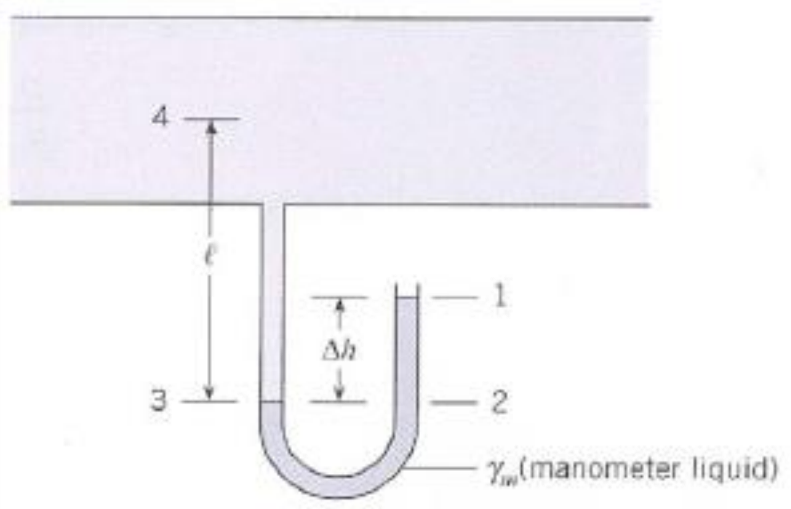
۳) پیزومتر: پیزومترها مانومترهای ساده ای هستند که برای اندازه گیری فشار سیالات هنگامی که فشار نسبی مثبت است، استفاده می شوند. برخلاف بارومتر، در پیزومترها انتهای لوله باز می باشد. بدیهی است که در صورت منفی بودن فشار نسبی، هوا از راه لوله وارد آب شده و نمی توان فشار را اندازه گیری کرد.



$$P_A = P_{atm} + \gamma h$$
$$P_A(g) = \gamma h$$

γ وزن مخصوص مایع است.

۴) مانومتر U شکل: برای اندازه گیری فشارهای نسبی منفی یا مثبت کوچک می توان از لوله U شکل استفاده کرد. در این حالت امکان قرارگیری مایع لوله در ترازی کمتر از تراز متوسط ظرف نیز وجود دارد. در فشارهای نسبی منفی یا مثبت بزرگتر، از مایع دارای چگالی بیشتری استفاده می شود. این مایع باید با سیال اولیه غیر قابل اختلاط باشد.



$$P_2 = P_3$$
$$P_2 = P_1 + \gamma_m \Delta h = \gamma_m \Delta h$$
$$P_3 = P_4 + \gamma l$$
$$\gamma_m \Delta h = P_4 + \gamma l \Rightarrow P_4 = \gamma_m \Delta h - \gamma l$$

در حالت کلی می توان از رابطه زیر نیز استفاده کرده و فشار هر نقطه دلخواه را بدست آورد.

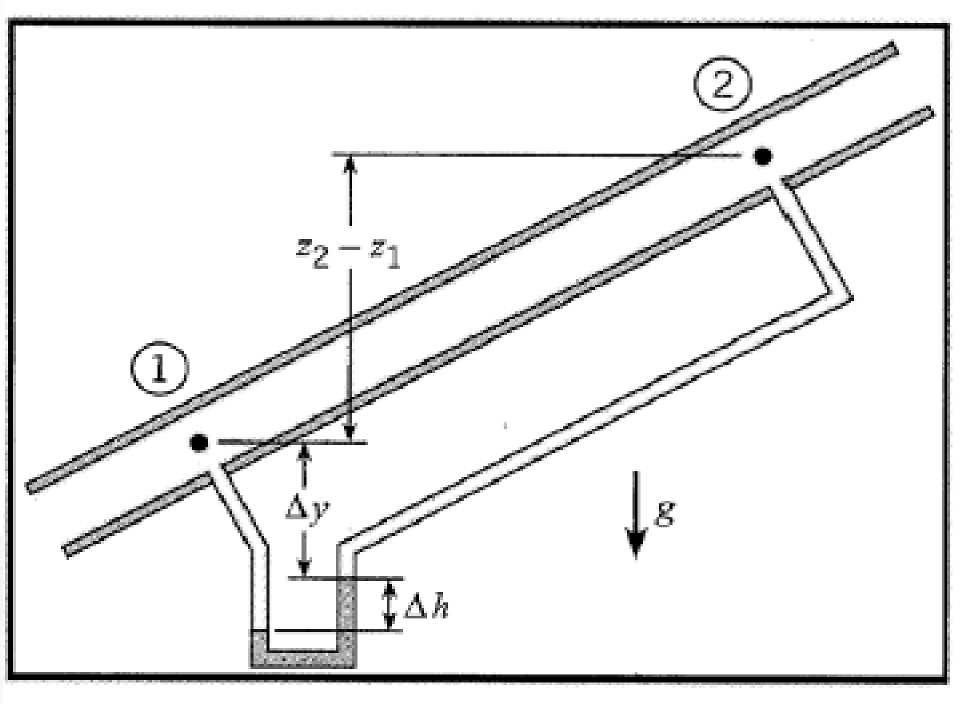
از نقطه n شروع کرده وبه سمت نقطه m حرکت می کنیم، حرکت به سمت پایین به افزایش فشار و حرکت به بالا به کاهش فشار منتهی می گردد:

$$\boxed{P_m = P_n + \sum_{down} \gamma_i h_i - \sum_{up} \gamma_i h_i}$$

در مثال فوق با حرکت از نقطه ۱ به نقطه ۴ داریم:

$$P_4 = P_1 + \gamma_m \Delta h - \gamma l = \gamma_m \Delta h - \gamma l$$

۵) مانومترهای تفاضلی: مانومترهای تفاضلی اختلاف فشار بین نقاط را نشان می دهند در حالی که فشار واقعی در هیچ نقطه از سیستم را نمی توان بدست آورد:



$$P_2 = P_1 + \gamma_w(\Delta y + \Delta h) - \gamma_m \Delta h - \gamma_w(\Delta y + z_2 - z_1)$$

مثال: برای یک پیزومتر حاوی آب به ارتفاع 2 m، ماکسیمم فشار نسبی که می توان اندازه گیری کند چقدر است؟

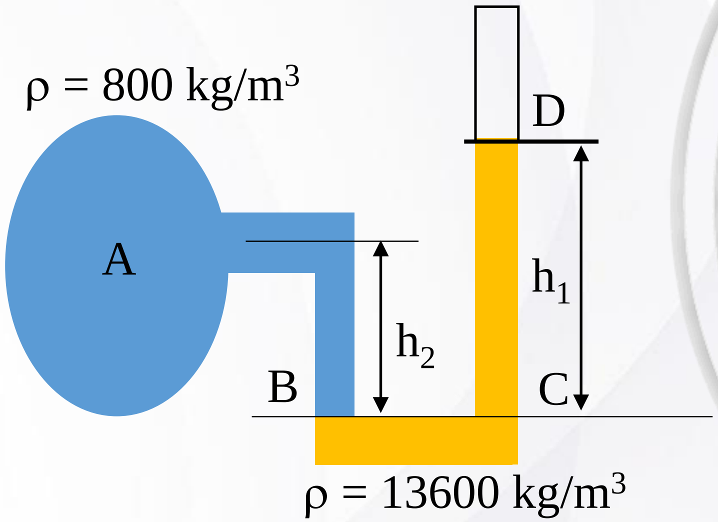
حل:

$$P = \rho g h = 1000 \times 9.81 \times 2 = 19620 \text{ Pa}$$

مثال: یک لوله U شکل مطابق شکل برای اندازه گیری فشار استفاده شده است. مطلوب است محاسبه فشار نسبی در نقطه A وقتی که:

۱) $h_2 = 0.5$ m و نقطه D، 0.9 m بالای خط BC است.

۲) $h_2 = 0.1$ m و نقطه D، 0.2 m زیر خط BC باشد.

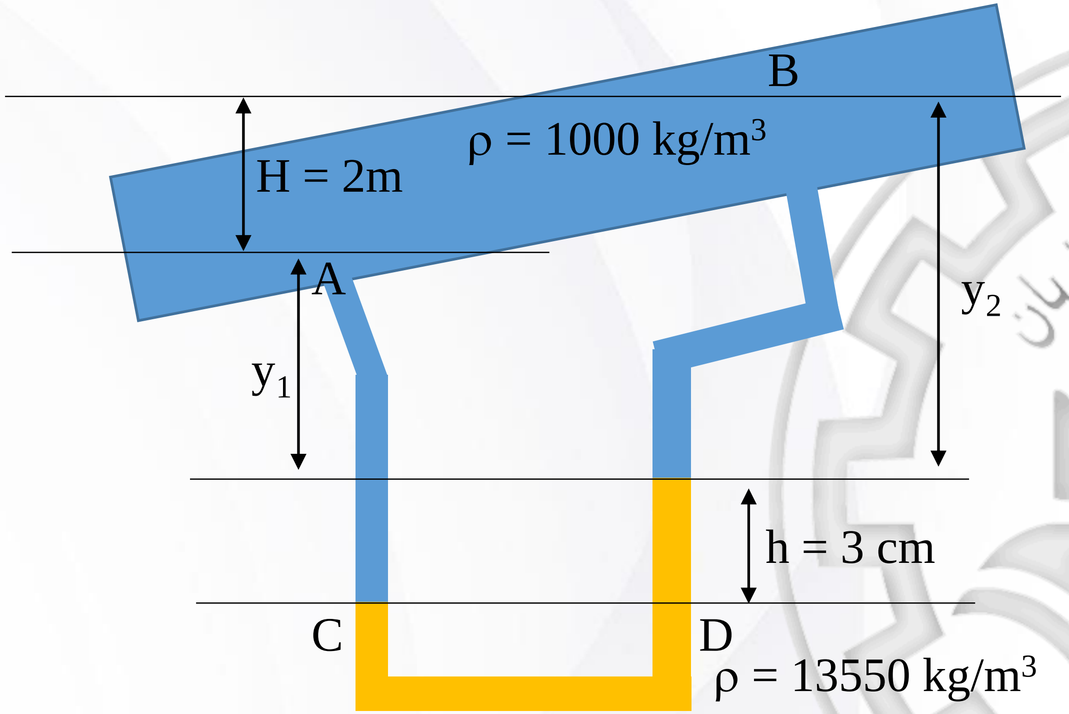


حل:

$$1)\ P_A = 800 \times 0.5 \times 9.81 - 13600 \times 0.9 \times 9.81 = 116 \text{ kPa}$$

$$2)\ P_A = -\,13600 \times 0.2 \times 9.81 - 800 \times 0.1 \times 9.81 = -\,25.9 \text{ kPa}$$

مثال: دو مقطع A و B از لوله ای که در آن آب جریان دارد، به یک مانومتر جیوه ای مطابق با شکل متصل است. اختلاف ارتفاع میان دو مقطع 2 m است، اختلاف فشار را میان دو نقطه A و B بدست آورید. اگر به جای آب درون لوله هوا جریان داشته باشد، اختلاف فشار میان دو مقطع چقدر است؟

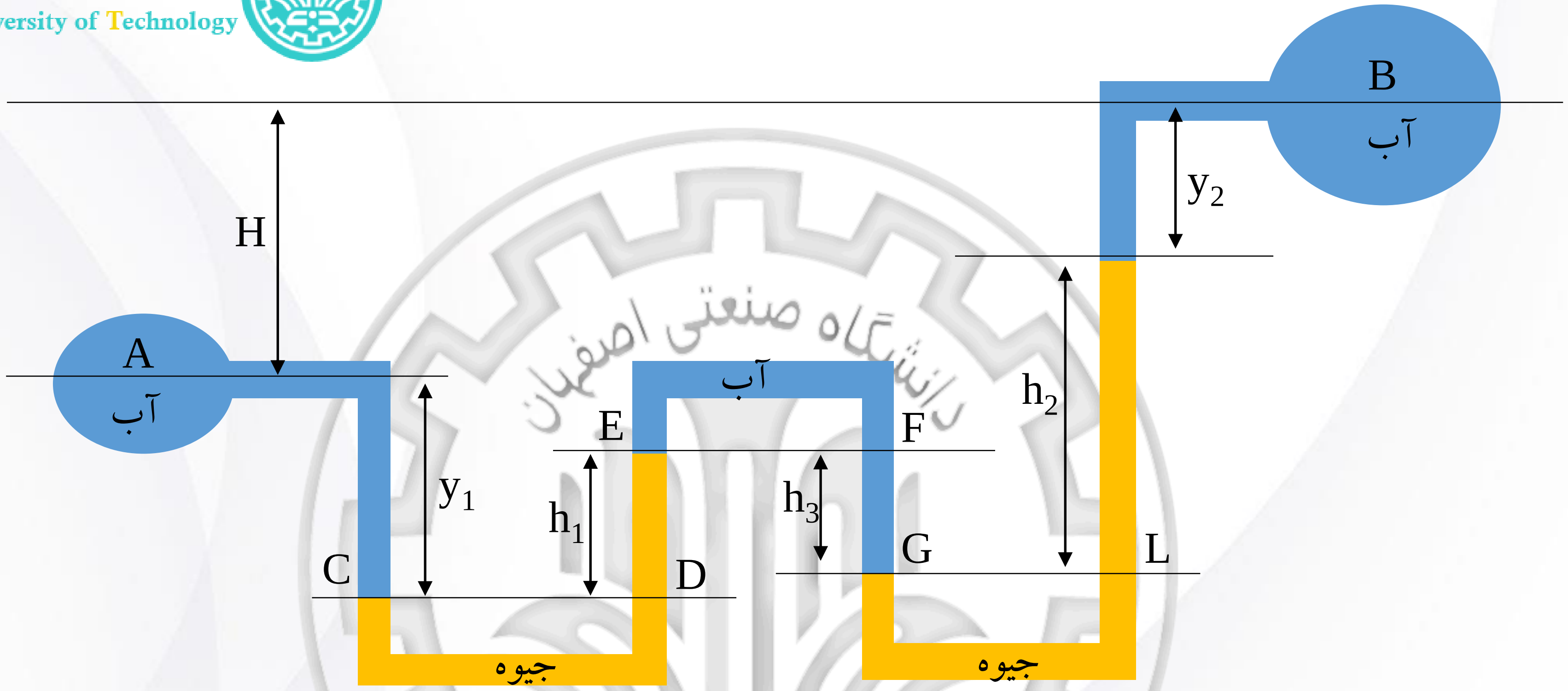


1) $P_A - P_B = 1000 \times 9.81 \times (2 - 0.03) + 13550 \times 9.81 \times 0.03 = 23.31$ kPa

2) $P_A - P_B = 1.23 \times 9.81 \times (2 - 0.03) + 13550 \times 9.81 \times 0.03 = 4.01$ kPa

✓ **مانومترها به صورت سری(مخلوط):**

برای اندازه گیری اختلاف فشار هنگامی که این اختلاف بسیار بزرگ باشد، می توان از دو یا چند مانومتر برای اندازه گیری اختلاف فشار استفاده کرد.



مثال: در شکل نشان داده شده، $H = 2\ m$ و $h_1 = h_2 = 20\ cm$ است. مایع مانومتری را جیوه در نظر بگیرید. اختلاف فشار میان دو مخزن A و B را بدست آورید. ارتفاع معادل آب چقدر است؟

حل:

$P_C = P_A + y_1\gamma_w$ ، $P_D = P_E + h_1\,\gamma_{man}$ ، $P_G = P_F + h_3\gamma_w$ ، $P_L = P_B + y_2\gamma_w + h_2\gamma_{man}$

$$P_A - P_B = (h_1 + h_2)\gamma_{man} + (y_2 - y_1)\,\gamma_w - h_3\gamma_w$$

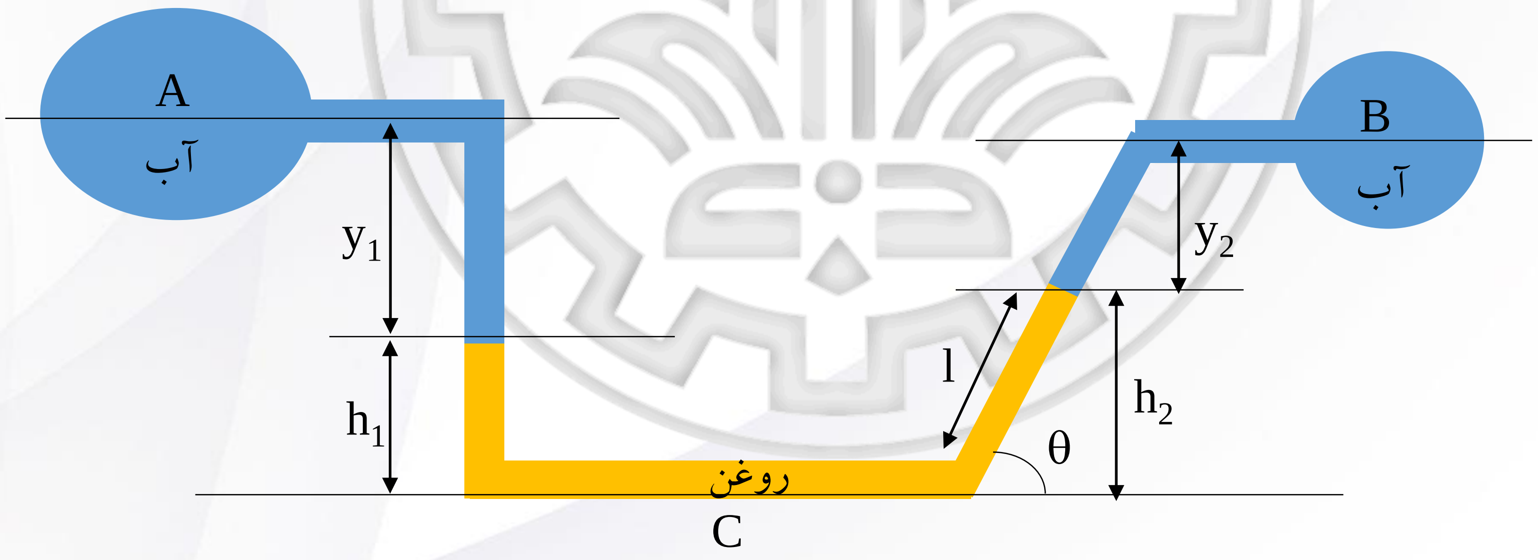
$$y_2 - y_1 = H + h_3 - (h_1 + h_2)$$

$$P_A - P_B = (h_1 + h_2)(\gamma_{man} - \gamma_w) + H\gamma_w = 0.4 \times 9.81 \times (1000 \times (13.55 - 1)) + 9.81 \times 1000 \times 2 = 68.9\ \text{kPa}$$

$$h = P/\rho g \Rightarrow h = 68866.2\,/(1000 \times 9.81) = 7\ \text{m}$$

✓ **مانومترهای شیب دار:**

برای اندازه گیری فشارهای کوچک که دقت بیشتری نیاز دارد، می توانیم از مانومترهای شیب دار استفاده کنیم.



مثال: مطابق شکل اسلاید قبل، فرض کنید $\theta = 30°$ و $l = 30\ cm$ و $h_1 = 10\ cm$ باشد. اختلاف فشار بین A و B را بدست آورید. فرض کنید مایع مانومتر دارای چگالی 1.54 باشد. ارتفاع معادل آب برای این اختلاف چقدر است؟

حل:

$$h2 = l \sin 30 = 0.5 \times 30 = 15\ cm$$

$$P_C = P_A + y_1\gamma + h_1\gamma_{man} = P_B + y_2\gamma + h_2\gamma_{man}$$

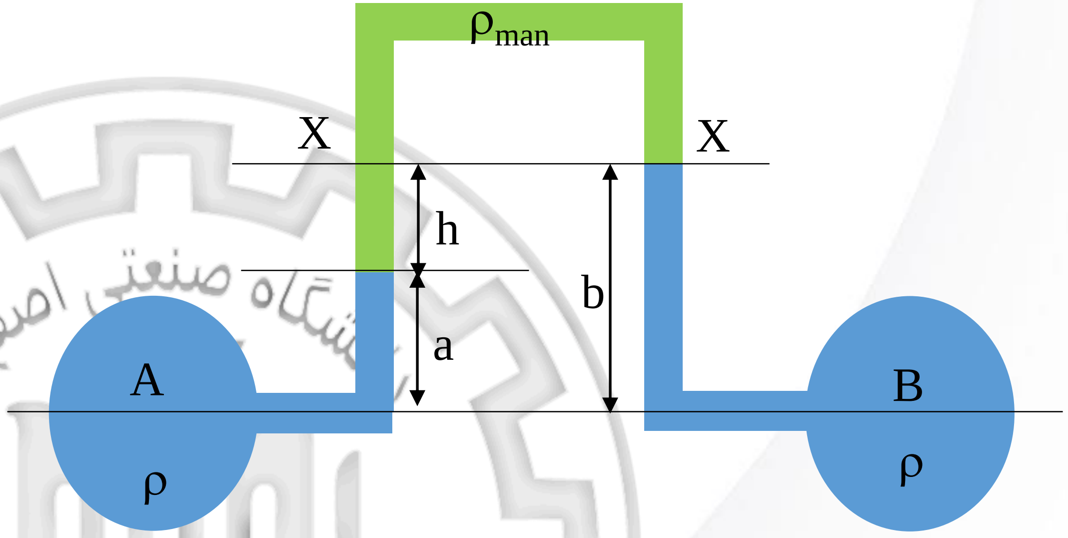
$$P_A - P_B = (y_2 - y_1)\gamma + \gamma_{man}\ (h_2 - h_1)\ , \qquad y_1 + h_1 = y_2 + h_2$$

$$P_A - P_B = (\gamma - \gamma_{man})(h_1 - h_2) = (9.81\ (1000 - 1.54 \times 1000))\ .\ (0.01(10\text{-}15)) = 264.87\ Pa$$

$$h = P/\rho g \Rightarrow h = 2.7\ cm$$

✓ **مانومترهای معکوس:**

برای اندازه گیری اختلاف فشارهای بسیار کوچک می توان از مانومتر معکوس استفاده کرد. در این نوع مانومترها، مایع مانومتر سبکتر از مایع مخازن مورد استفاده است.



چپ : $P_{XX} = P_A - \rho g a - \rho_{man} g h$

راست : $P_{XX} = P_B - \rho g(b+h)$

$P_B - P_A = \rho g(b-a) + gh(\rho - \rho_{man})$

مثال: در شکل بالا اختلاف فشار میان A و B را تعیین کنید. برای وقتی که مایع آب است و $\rho = 1000$ و $h = 0.3$ m و $a = 0.25$ m و $b = 0.15$ m باشد. اگر سیال مانومتر (۱) هوا باشد: $\rho = 1.23$ kg/m^3 و (۲) روغن با چگالی 0.8

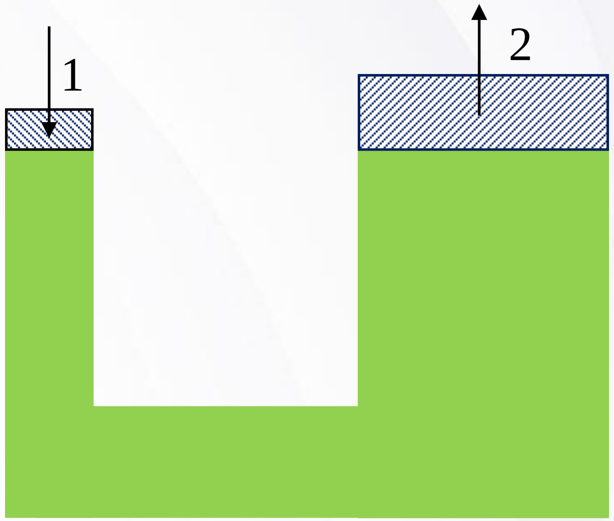
حل:

1) $P_B - P_A = \rho g(b-a) + gh(\rho - \rho_{man}) = 1000 \times 9.81\ (0.15 - 0.25) + 9.81 \times 0.3 \times (1000 - 1.23) = 1.96$ kPa

2) $P_B - P_A = 1000 \times 9.81\ (0.15 - 0.25) + 9.81 \times 0.3 \times (1000 - 800) = -\ 392.4$ kPa

مثال: نیرویی که معادل 850 N است بر روی یک سیلندر کوچکتر یک جک هیدرولیک وارد شده است. سطح مقطع پیستون کوچکتر $15\ \mathrm{cm^2}$ است و سطح مقطع پیستون بزرگتر $150\ \mathrm{cm^2}$ است. چه جرمی را می تواند پیستون بزرگتر تحمل کند. برای دو حالت: ۱) هر دو پیستون در یک سطح باشند. ۲) وزن مخصوص مایع درون جک $9.8 \times 10^3\ \mathrm{N/m^3}$ است.

حل:



$$1)\ P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{850}{0.0015} = \frac{F_2}{0.015} \Rightarrow W = F_2 = 8500\ \mathrm{N}$$

$$2)\ \rho g h + \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow 9.81 \times 1000 \times 9.81 \times 0.75 + \frac{850}{0.0015} = \frac{F_2}{0.015} \Rightarrow$$

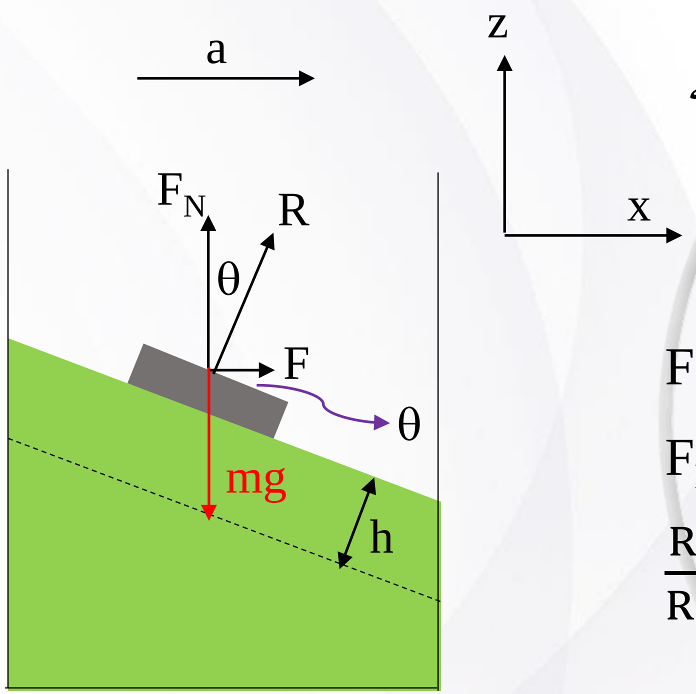
$$F_2 = 9582.66\ \mathrm{N}$$

✓ **سیالات در حالت تعادل نسبی:**

اگر تمام ذرات سیال یا بدون حرکت باشند یا نسبت به یک دستگاه مختصات لخت به طور همسان سرعت ثابت داشته باشد یعنی حرکت آنها طوری باشد که در آن هیچ لایه ای نسبت به لایه مجاور خود حرکت نکند، آن سیال را استاتیک در نظر می گیرند. در این شرایط مشخص می شود که در یک نقطه از سیال نیرو بر واحد سطح عمود است که در این حالت فشار ایجاد شده را فشار هیدرواستاتیک می نامند. در حالت استاتیک سیالات، سیال لزوما باید به طور کامل از تنش برشی فارغ باشد، زیرا تغییرات سرعت به تغییرات عمق (du/dy) در تمام جهات در جریان یکنواخت یا سیال ساکن باید صفر باشد. به همین دلیل تنها تنش های عمودی را در نظر می گیرند.

✓ توزیع فشار در یک سیال تحت شتاب افقی:

یک المان کوچک بر روی سطح سیال را در نظر می گیریم. در حالی که سیال در یک ظرف قرار گرفته و تحت شتاب افقی می باشد:



همه نیروها عمود بر سطح هستند و حالت تعادل نسبی دارد. پس نیروی وارد بر این المان R است که نیروی عکس العملی است که از طرف سیال به این المان وارد می شود. یک مولفه آن شتاب دهنده (F) و یک مولفه آن خنثی کننده وزن است. (F_N)

$$F = R\sin\theta = ma$$

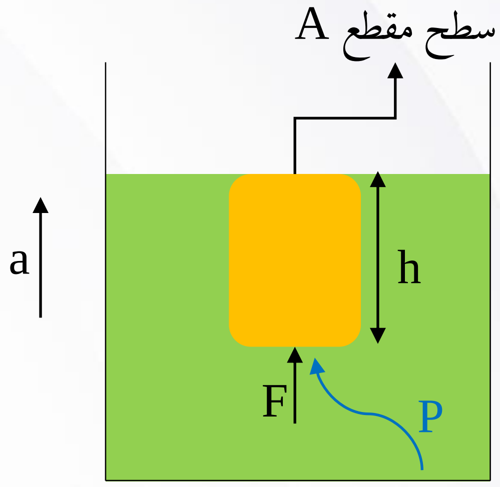
$$F_N = R\cos\theta = mg$$

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{a}{g}}$$

نتیجه: اگر خطی موازی با خطی که المان روی آن قرار گرفته، در نظر گرفته شود. همه نقاط روی آن خط دارای فشار یکسان هستند.

✓ توزیع فشار در یک سیال تحت شتاب عمودی:

سیالی با دانسیته ρ در نظر بگیرید. سیال تحت شتاب عمودی a قرار می گیرد. سیال تعادل نسبی دارد، پس مجموع نیروهای وارد بر این المان باید صفر باشند. وقتی که مجموع این نیروهای وارد بر المان را بررسی کنیم، داریم:



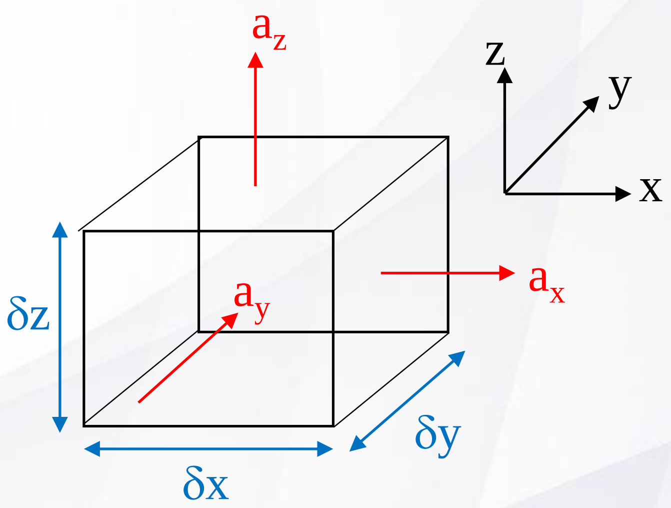
نیروی شتاب به طرف بالا F = نیروی وزن – نیروی فشار P

$$PA - hA \times \rho \times g = F$$

$$F = ma = \rho hA \times a$$

بنابراین در نهایت داریم:

$$PA - \rho ghA = \rho hAa \Rightarrow \boxed{P = \rho gh\left(1 + \frac{a}{g}\right)}$$



✓ معادله کلی فشار برای سیال در حالت تعادل نسبی:

یک المان به صورت مکعب مستطیل داریم که وجه هایش و جهات این المان مشخص شده اند:

تغییرات فشار نسبت به x: $\frac{\partial P}{\partial x}$ و شتاب در راستای x: a_x و به همین ترتیب داریم: $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial P}{\partial z}$ و a_y و a_z

نیرو در جهت x : $F_x = P\,\delta y\,\delta z - (P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x)\,\delta z\,\delta y$

باید فشار در طرف راست کمتر از طرف چپ المان باشد تا حرکت از چپ به راست رخ دهد پس تغییر فشار باید منفی باشد:

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\delta x\,\delta y\,\delta z \quad (1)$$

$$F = ma \Rightarrow F_x = \delta x\,\delta y\,\delta z \times \rho \times a_x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\, a_x \quad (3)$$

به همین ترتیب داریم:

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = \rho\, a_y \quad (4)$$

در جهت Z باید وزن المان را هم در نظر بگیریم:

$$F_z = P\,\delta x\,\delta y - (P + \frac{\partial P}{\partial z}\delta z)\,\delta x\,\delta y - \rho g\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$$F_z = -\frac{\partial P}{\partial z}(\delta x\,\delta y\,\delta z) - (\rho g\,\delta x\,\delta y\,\delta z) \qquad (5)$$

$$F_z = ma = (\rho g\,\delta x\,\delta y\,\delta z) \times a_z \qquad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z} = \rho\,(g + a_z) \qquad (7)$$

فشار در یک نقطه داده شده در یک سیال بوسیله انتگرال گیری از معادله زیر بدست می آید:

$$\boxed{P = \int dP = \int \frac{\partial P}{\partial x}dx + \int \frac{\partial P}{\partial y}dy + \int \frac{\partial P}{\partial z}dz}$$

دو نقطه زیر را در نظر می گیریم:

(x,y,z) و $(x+dx, y+dy, z+dz)$ $\Rightarrow dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$

با استفاده از روابط قبلی ۳، ۴ و ۷ داریم:

$$dP = -\rho\,(a_x dx + a_y dy + (g+a_z)dz)$$

فرض: ثابت بودن دانسیته سیال به عبارتی سیال تراکم ناپذیر است.

پس از انتگرال گیری خواهیم داشت: (که C ثابت انتگرال است)

$$\boxed{P = -\rho(a_x x + a_y y + (g+a_z)z) + C}$$

این یک معادله کلی است. از این معادله می شود حالت های خاص را بدست آورد:

معادله سطح آزاد مایع که فشار روی آن معادل اتمسفر است:

$$\boxed{a_x dx + (g+a_z)dz = 0}$$

با فرض ثابت بودن ρ و در حالت دو بعدی (صفحه z-x)

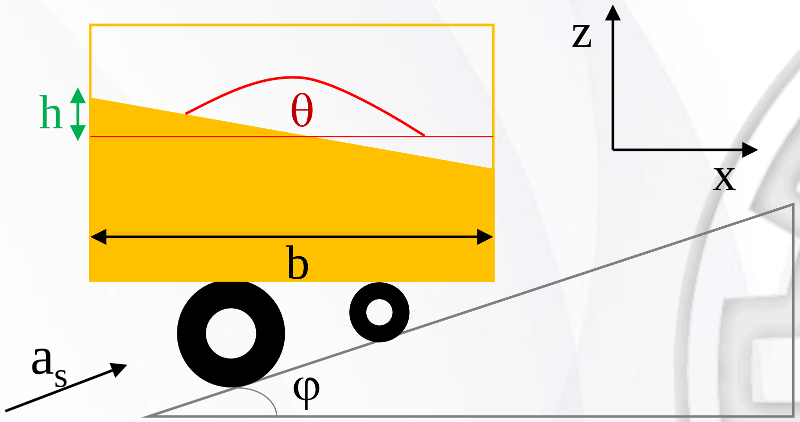
$$\boxed{dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz}$$

فرض: دانسیته ثابت و با جایگذاری روابط قبلی داریم:

$$\boxed{P = -\rho(a_x x + (g+a_z)z) + C}$$

نکته:

$$a_x dx + (g + a_z) dz = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z}}$$



✓ **توزیع فشار در یک سیال در حال حرکت بر روی سطح شیب دار:**

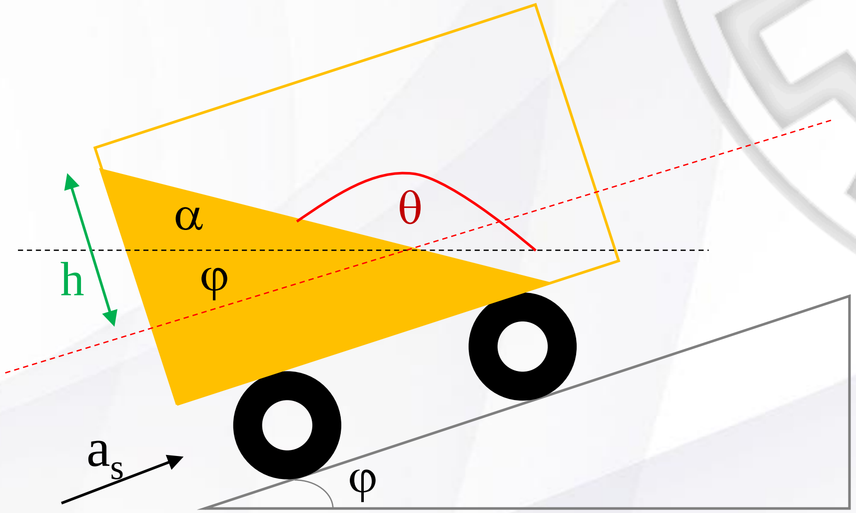
۱) فرض کنید سطح شیب دار با افق زاویه φ و ظرف موازی افق باشد، داریم:

$$a_x = a_s \cos\varphi$$

$$a_z = a_s \sin\varphi$$

$$\Rightarrow P = -\rho(x a_s \cos\varphi + gz + z a_s \sin\varphi) + C$$

$$\boxed{\tan\theta = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi} \qquad h = \tan\theta \times \frac{1}{2} b}$$



۲) فرض کنید ظرف موازی سطح شیب دار باشد:

$$\boxed{\tan\theta = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi}, \; h = \tan(\varphi + \alpha) \times \frac{1}{2} b}$$

مثال: یک مخزن مکعب مستطیل با عمق 1.2 m و طول 2 m برای بالابردن آب در یک سطح شیب دار استفاده می شود. زاویه سطح شیب دار با افق 30 می باشد. شیب سطح آب را بدست آورید، اگر:

۱) شتاب موازی با سطح شیب دار در شروع، پایین به طرف بالا $4\ m/s^2$ باشد.

۲) شتاب منفی موازی با سطح شیب دار و در موقع رسیدن به بالا $4.5\ m/s^2$ باشد.

۳) اگر بخواهیم در طول این حرکت از ریختن آب به بیرون جلوگیری کنیم، چه ارتفاعی از آب باید در تانک باشد وقتی که تانک در حالت سکون باشد.

حل:

$$1)\quad \tan\theta = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi} = -\frac{4\times\cos 30}{9.81+4\times\sin 30} = -0.296 \Rightarrow \theta = -16.51\,° \Rightarrow \theta_A = 163.49\,°$$

تانژانت با متمم زاویه یکسان است.

$$2)\ \tan\theta = -\frac{(-4.5)\times\cos 30}{9.81+(-4.5)\times\sin 30} = 0.515 \Rightarrow \theta = 27.29\,° \Rightarrow \theta_A = 180 - 27.29 = 152.71\,°$$

ارتفاع اولیه سیال + h = ارتفاع مخزن $\Rightarrow$ ارتفاع اولیه سیال + نصف طول مخزن × $\tan\theta$ = ارتفاع مخزن $\Rightarrow$ ارتفاع اولیه سیال + $\frac{1}{2} \times 2 \times 0.515 = 1.2$

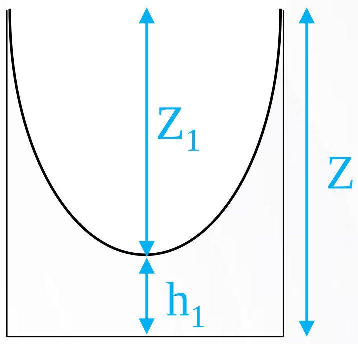
ارتفاع اولیه سیال $= 0.6846$ m

$$\alpha = 180 - 27.29 = 152.71\,°$$

✓ تاثیر دوران ظرف بر روی مایع درون آن:

اگر یک ظرف به صورت زیر داشته باشیم و ظرف دوران کند، سطح آن تغییر می کند و داریم:

لذا تغییرات فشار در مایع در حالت کلی با سرعت زاویه ای ثابت به دو پارامتر r و z بستگی خواهد داشت:



$$dP = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

با توجه به روابط قبل داریم:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \rho a_x \ , \ a_x = -r\omega^2 \ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = -(-r\omega^2) = \rho r\omega^2$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \rho(g+a_z) \ , \ a_z = 0 \ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = \rho r\omega^2 \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\int_{P_1}^{P} dP = \int_{r_1}^{r} \rho r\omega^2 dr - \int_{z_1}^{z} \rho g \, dz \Rightarrow P-P_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - r_1^2) - \rho g(z-z_1)$$

$$= \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + C \ , \ C = \rho g z_1 + P_1 - \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2} - \rho g z$$

دکتر علی زادهوش

با توجه به شکل داریم:

$$z_1 = h_1 = 0\ ,\ P_1 = P_{atm} \Rightarrow P - P_{atm} = \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g(z-h_1)$$

برای سطح آزاد:

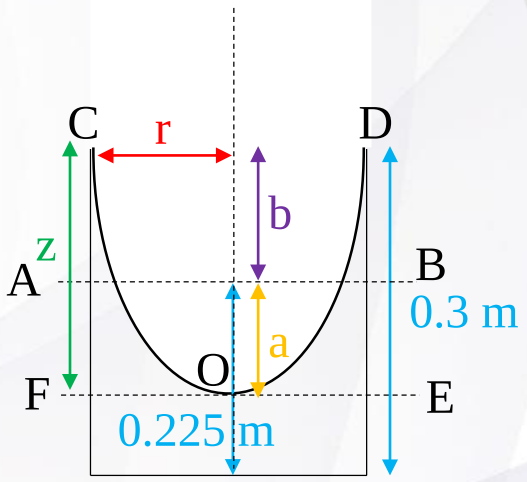
$$P = P_{atm} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g(z-h_1) = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_1}$$

مثال: یک ظرف به شکل سیلندر و با قطر 100 mm و ارتفاع 0.3 m طوری قرار گرفته است که حول محور قائم خود چرخش می کند. در حالت سکون آب در آن ریخته شده و تا ارتفاع 0.225 m می باشد. سرعت را بر حسب rad/s محاسبه کنید. برای دو حالت زیر:

۱) اگر آب از روی لبه ظرف بیرون ریخته نشود. ۲) ارتفاع محوری صفر شود.

حل:

در مرکز : $z = 0$ ، در لبه : $z = 0.3\ ,\ r = \frac{1}{2}.d = 0.05$



COD حجم سهمی = CDFE نصف حجم سیلندر

$$= \frac{1}{2}\ \pi\ r^2\ z$$

$$z = a + b\ \ ,\ \ a = b\ \ \Rightarrow z = 2a$$

بنابراین:

حجم CFOED = حجم سیلندر ABEF

$$\frac{1}{2}\pi r^2 (a+b) = \pi r^2 a$$

1) $z = 2 \times (0.3 - 0.225) = 0.15$ m

$$\omega^2 = \frac{2gz}{r^2} = \frac{2 \times 9.81 \times 0.15}{0.05^2} = 1177.2 \Rightarrow \omega = 34.3 \text{ rad/s}$$

2) $\omega^2 = \frac{2gz}{r^2} = \frac{2 \times 9.81 \times 0.3}{0.05^2} = 2352.4 \Rightarrow \omega = 48.5$ rad/s

تکالیف:

۱) فشار $P = 50\ kPa$ را بر حسب واحدهای زیر تبدیل کنید.

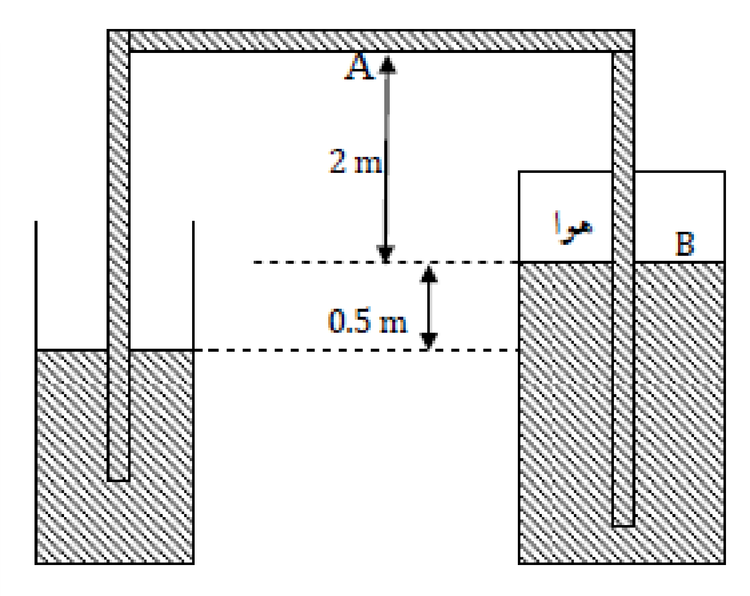
الف) متر آب $\gamma_w = 1\ g/cm^3$، ب) سانتی متر جیوه $\gamma_{Hg} = 13.6\ g/cm^3$ ، متر مایعی با $\gamma_m = 1.3\ g/cm^3$

۲) فشار سنجی میزان فشار هوا را در قله یک کوه $60\ cmHg$ و در پایین آن $74\ cmHg$ نشان می دهد. اگر وزن مخصوص هوا را از پایین تا قله کوه ثابت و برابر $\gamma = 1.232\ kg/m^3$ در نظر بگیریم. ارتفاع کوه را محاسبه کنید.

۳) برای هوای ایزوترم در دمای $0\ °C$، فشار و دانسیته در ارتفاع $4000\ m$ را بدست آورید. فشار مطلق در سطح دریا $0.1\ MPa$ است.

۴) در هوای ایزوترم با دمای $25\ °C$ چند متر به طور قائم باید بالا رویم تا دانسیته 10 درصد کاهش یابد؟

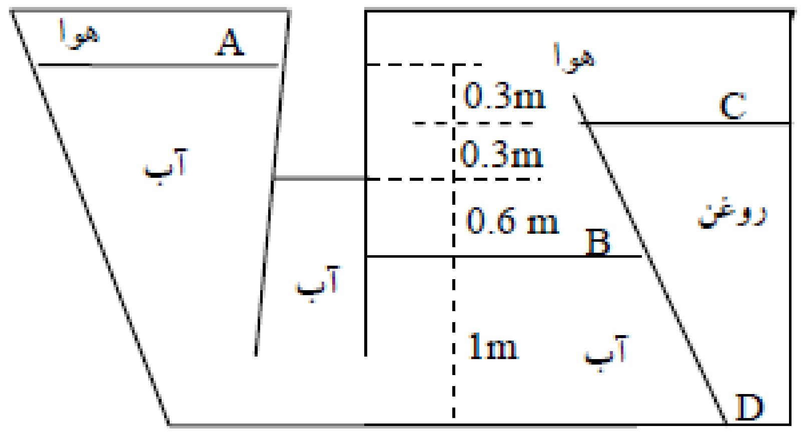
۵) در شکل زیر لوله با روغن پر شده است. فشار در نقاط A و B را نسبت به سطح آزاد مایع بر حسب پاسکال بدست آورید. $\gamma_{oil} = 0.85$



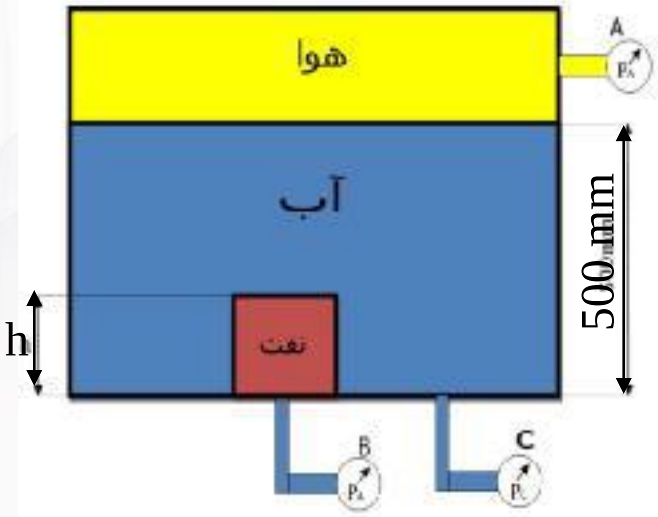
دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

۶) در شکل زیر فشار نسبت به سطح آزاد مایع (فشار نسبی) را در نقاط A,B,C,D بر حسب پاسکال بدست آورید.

$\rho = 1000\ kg/m^3$ ،$\gamma_{oil} = 0.85$

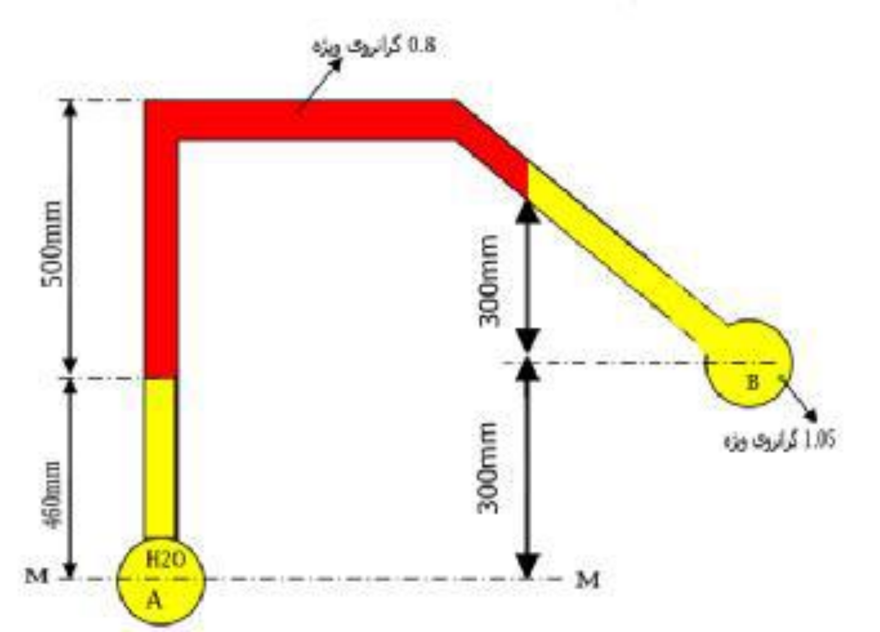


۷) یک مخزن استوانه ای تا ارتفاع 500 mm آب دارد. در داخل آن یک مخزن استوانه ای کوچکتر قرار دارد که تا ارتفاع h حاوی نفت با $\gamma = 0.8$ می باشد. فشارسنج ها اعداد $P_B = 13.8\ kPa$ و $P_C = 13.82\ kPa$ را نشان می دهند. فشار نقطه P_A و مقدار h چقدر است؟



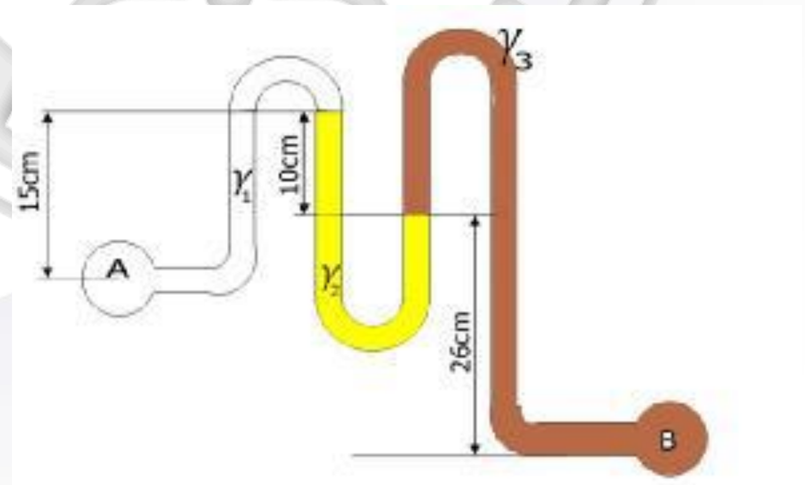
۸) اختلاف فشار بین مرکز مخزن A و B را محاسبه کنید. اگر دستگاه 180 درجه حول محور MM چرخانده شود، چه اختلاف فشاری بین مخزن ها لازم خواهد بود تا وضعیت سیالات بدون تغییر باقی بماند؟

γ سیال زرد برابر 1.05 و γ سیال قرمز برابر 0.8



۹) تفاضل ارتفاع معادل فشار (متر ارتفاع آب) بین مخازن A و B در شکل مقابل چقدر است؟

$\gamma_1 = 1.2\,\gamma_w, \gamma_2 = 2\gamma_w, \gamma_3 = 0.55\gamma_w$



۱۰) یک مخزن مستطیلی حاوی آب با شتاب $3\ m/s^2$ روی یک سطح شیب دار با زاویه 30 نسبت به افق به طرف بالا حرکت می کند. شیب سطح آب چقدر است؟

۱۱) یک ظرف استوانه ای به قطر $100\ mm$ حاوی مایع به عمق $300\ mm$ است. اگر این ظرف حول محور قائم خود با سرعت 400 دور در دقیقه بچرخد، عمق سهمی حاصل در سطح مایع چقدر خواهد بود؟

۱۲) یک مخزن استوانه ای قائم به قطر $1\ m$ و ارتفاع $1.5\ m$ تا نصف با آب پر شده است. اگر استوانه با سرعت 90 دور بر دقیقه حول محور قائم خود بچرخد. حداقل فشار وارد بر کف مخزن چند پاسکال خواهد شد؟

$\gamma = 10000\ N/m^3$, $g = 10\ m/s^2$