دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مکانیک سیالات

استاد: دکتر علی زادهوش

اردیبهشت ۹۹

فصل چهارم: دینامیک سیالات

✓ تعاریف اساسی و معادلات بنیادی:

سینماتیک سیالات شاخه ای از مکانیک است که با حرکت ذرات سیالات در رابطه است و خصوصیات ذرات یا اثر نیروها بر روی حرکت ذرات را بررسی نمی کند.

✓ انواع جریان:

۱) جریان پایدار و ناپایدار

۲) جریان یکنواخت و نایکنواخت

۳) جریان آرام، آشفته و انتقالی (گذرا)

۴) جریان تراکم پذیر و تراکم ناپذیر

۵) جریان چرخشی و غیرچرخشی

۶) جریان یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

۷) جریان بحرانی، فوق بحرانی و زیربحرانی

✓ تعاریف ریاضی برای انواع جریان:

۱) جریان پایدار و ناپایدار: جریان پایدار جریانی است که خصوصیاتی از قبیل سرعت، فشار، دانسیته و ... در یک نقطه ای از فضا با زمان تغییر نمی کند. به صورت ریاضی داریم:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{x0,y0,z0} = 0 \ , \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{x0,y0,z0} = 0 \ , \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x0,y0,z0} = 0$$

جایی که موقعیت به صورت (x_0,y_0,z_0)، یک نقطه ثابت در میدان جریان است.

در مورد جریان ناپایدار، تغییرات نسبت به زمان داریم و به صورت ریاضی تعریف می شود:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{x0,y0,z0} \neq 0 \ , \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{x0,y0,z0} \neq 0 \ , \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x0,y0,z0} \neq 0$$

۲) جریان یکنواخت و نایکنواخت: وقتی تعدادی از خصوصیات سیال مانند سرعت، دانسیته، فشار نسبت به مکان در یک زمان مشخص تغییر نکنند، جریان یکنواخت می باشد، از نظر ریاضی:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_{t=cte} = 0 \ , \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{t=cte} = 0 \ , \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{t=cte} = 0$$

اگر تغییرات نسبت به مکان در یک زمان ثابت، مخالف صفر باشد، جریان نایکنواخت است و از نظر ریاضی:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_{t=cte} \neq 0, \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{t=cte} \neq 0, \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{t=cte} \neq 0$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

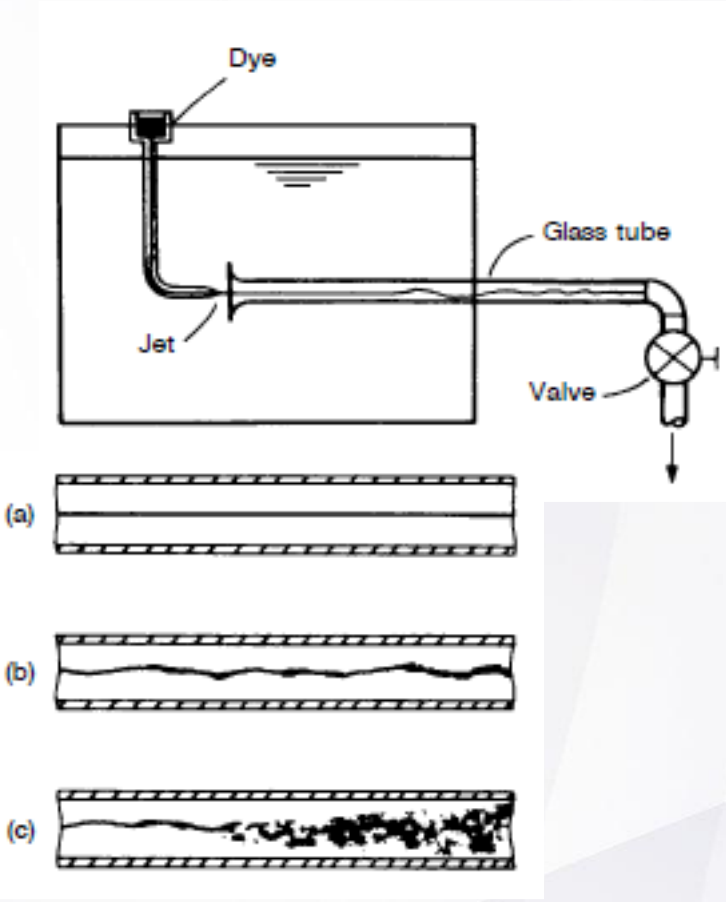
۳) جریان آرام، آشفته و گذرا: اگر یک جریان داشته باشیم، معمولا دو نیرو وارد می شود.

نیروی اینرسی و دیگری نیروی ویسکوز. نیروی اینرسی که در مرکز ثقل است، می خواهد سیال را به حرکت در آورد ولی نیروی ویسکوز با جریان یافتن سیال مخالفت می کند. اگر نیروی ویسکوز بر اینرسی غلبه کند، جریان آرام و در حالت برعکس جریان آشفته است. وقتی از جریان آرام به جریان آشفته می رویم، ناحیه بین آرام و آشفته را گذرا گویند. برای بررسی این نوع جریان، عدد رینولدز تعریف می شود:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

اثبات:

در شکل مقابل لوله به تانک متصل و یک شیر در انتهای لوله قرار گرفته و تانک با سیالی مانند آب پر شده است. درون تانک سرنگی قرار دارد که حاوی مواد رنگی است که ویسکوزیته آن با ویسکوزیته سیال مطابقت دارد. با باز و بسته کردن شیر و بررسی حرکت مسیر رنگ در سیال می توان نوع جریان را تعیین نمود. اگر با باز شدن شیر و شروع جریان سیال، مسیر رنگ مطابق شکل (a) به صورت خط ثابت باقی بماند، جریان آرام است. اگر مطابق شکل (b) با افزایش سرعت جریان سیال، خط رنگ، قدری متلاطم شود و شروع به نوسان کند، جریان انتقالی یا گذراست. اگر مطابق شکل (c) با افزایش سرعت جریان، خط رنگ کاملا متلاشی و از بین رود، جریان آشفته است.



مشخصه طول مانند قطر لوله : l زمان : t

طول، سطح، سرعت و شتاب بر اساس l و t تعریف می شوند:

حجم المان : $k_1 l^3$, جرم المان : $k_1 l^3 \times \rho$, سرعت المان : $k_2 . \frac{l}{t}$, شتاب عنصر : $k_3 \times \frac{l}{t^2}$, سطح زیر تنش : $k_5 l^2$

(قانون نیوتن) شتاب × جرم = نیروی اینرسی

$$= k_1 l^3 \times \rho \times k_3 \times \frac{l}{t^2} = k_1 k_3 \rho l^2 (\frac{l}{t})^2 = (\frac{k_1 k_3}{k_2}) \rho l^2 V^2$$

سطح زیر تنش × تنش برشی ویسکوز = نیروی ویسکوز

تنش برشی ویسکوز = گرادیان سرعت × ضریب ویسکوزیته دینامیکی $= \mu \times (\frac{V}{k_4 l})$

$$\text{نیروی ویسکوز} = \mu \times (\frac{V}{k_4 l}) \times k_5 l^2 = (\frac{k_5}{k_4}) \mu V L$$

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} = (\frac{k_1 k_3 k_5}{k_2 k_4}) . \frac{\rho l^2 V^2}{\mu V l} = \text{ثابت} \times \frac{\rho V l}{\mu}$$

این نسبت را عدد رینولدز گویند و معیاری برای تعیین نوع جریان می باشد.

لذا در یک لوله داریم:

$Re < 2000 \Rightarrow$ جریان آرام

$2000 < Re < 4000 \Rightarrow$ جریان گذرا

$4000 < Re \Rightarrow$ جریان آشفته

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} \, , \, \nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow Re = \frac{vl}{\nu} \Rightarrow \text{در یک لوله} \Rightarrow Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

اگر محیط حرکت سیال متفاوت باشد، بازه ها تغییر می کند، در واقع d می تواند با چهار برابر شعاع هیدرولیک تغییر کند:

$$R = \frac{A}{P}$$

که در آن، A سطح مقطع جریان و P محیط و برای Re داریم:

$$Re = \frac{V.4R}{\nu}$$

۴) جریان تراکم پذیر و تراکم ناپذیر: اگر دانسیته یک سیال قابل تغییر نباشد، تراکم ناپذیر است. به طور کلی مایع را تراکم ناپذیر و گاز تراکم پذیر می باشد. ولی حالت های خاصی است که مایع تراکم پذیر و گاز تراکم ناپذیر می شود که بسته به عدد ماخ دارد.

۵) جریان یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی: وقتی که سرعت تابعی از زمان باشد و تابعی از یک راستا (بعد) در فضا باشد، جریان یک بعدی می باشد. لذا آن بعد یا راستا x نامیده می شود. به همین ترتیب، دوبعدی تابعی از دو بعد و زمان و سه بعدی تابعی از سه بعد و زمان می شود. از نظر ریاضی:

پایدار و یک بعدی : $u = f(x) , v = 0 , w = 0$

مولفه های سرعت : u در راستای x و v در راستای y و w در راستای z.

ناپایدار و یک بعدی : $u = f(x,t) , v = 0 , w = 0$

پایدار و دو بعدی : $u = f_1(x,y) , v = f_2(x,y) , w = 0$

ناپایدار و دو بعدی : $u = f_1(x,y,t) , v = f_2(x,y,t) , w = 0$

پایدار و سه بعدی : $u = f_1(x,y,z) , v = f_2(x,y,z) , w = f_3(x,y,z)$

ناپایدار و سه بعدی : $u = f_1(x,y,z,t) , v = f_2(x,y,z,t) , w = f_3(x,y,z,t)$

۶) جریان چرخشی و غیرچرخشی: یک جریان چرخشی، خط جریان دایره ای دارد و سیال حول محور خود می چرخد.

۷) جریان بحرانی و فوق بحرانی و زیر بحرانی: یک پارامتر به نام عدد فروید تعریف می شود و این نوع جریان تحت تاثیر نیروی جاذبه رخ می دهد. در کانال نیروی جاذبه، نیروی غالب است. بنابراین نیرویی که حرکت را در کانال و رودخانه به حرکت در می آورد، نیروی جاذبه است. یعنی اگر شیب وجود نداشته باشد، حرکتی اتفاق نمی افتد. که به نوعی، تعبیر دیگری از عدد رینولدز می باشد.

$Fr = 1 \rightarrow$ جریان بحرانی

$Fr > 1 \rightarrow$ جریان فوق بحرانی

$Fr < 1 \rightarrow$ جریان زیربحرانی

✓ شدت جریان حجمی (Q):

شدت جریان حجمی که دبی نیز نامیده می شود، مقدار حجمی که در یک زمان مشخص اندازه گیری می شود.

$Q = \text{سرعت} \times \text{سطح مقطع} = V \times A \rightarrow m^3/s \quad or \quad l/s$

✓ شدت جریان جرمی ($\dot{m}$):

مقدار جرمی که در یک زمان مشخص اندازه گیری می شود.

$\dot{m} = Q \times \rho \rightarrow kg/s$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

✓ معادله پیوستگی یک بعدی:

بر اساس قانون بقای جرم، در جریان پایدار، اگر یک سیال تراکم ناپذیر بطور پیوسته در یک لوله یا کانال (سطح مقطع آن می تواند ثابت یا متغییر باشد) جریان داشته باشد، مقدار دبی جریان در تمام مقاطع یکسان خواهد بود.

داریم:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \text{ثابت}$$

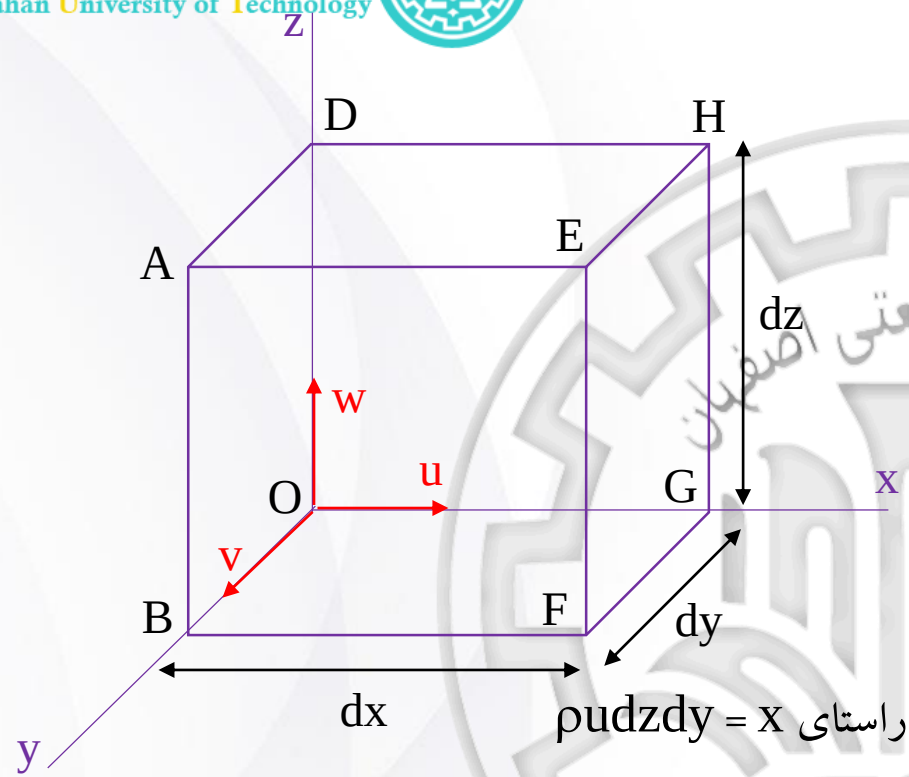
اگر سیال تراکم ناپذیر باشد، دانسیته ثابت است.

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2 = \text{ثابت}$$

معادله فوق معادله پیوستگی یک بعدی می باشد.

✓ معادله پیوستگی سه بعدی:

یک المان مکعب یکنواخت از یک سیال را در نظر بگیرید که وجوه dx، dy و dz دارد. مولفه های سرعت در x، y و z به ترتیب u، v و w هستند. دانسیته سیال ρ است.



اکنون گفته می شود: جرم ورودی به وجه ABOD در واحد زمان در راستای x = $\rho udzdy$

جرم خروجی از وجه EFGH در واحد زمان در راستای x= $\rho udzdy + \frac{\partial}{\partial x}(\rho udzdy)dx$

جرم خروجی از وجه EFGH – جرم ورودی از وجه ABOD = جرمی از سیال که در المان باقی می ماند در راستای x در واحد زمان

$$= (\rho udzdy) - (\rho udzdy + \frac{\partial}{\partial x}(\rho udzdy)dx) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho udzdy)dx$$

به صورت مشابه، جرم سیال باقیمانده در راستای z و y عبارتند از:

$$= - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v dx dz) dy$$

$$= - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w dx dy) dz$$

و جمع جرمی که در واحد زمان باقیمانده است:

$$= - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz \qquad (1)$$

از طرف دیگر جرم عبارت است از:

$$m = \rho \times V$$

که از m نسبت به زمان مشتق بگیریم، $\dot{m}$ بدست می آید. بنابراین:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = \frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz) \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} (dx dy dz)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0} \qquad (3)$$

رابطه (۳) معادله پیوستگی جریان سه بعدی است.

✓ **معادله پیوستگی سه بعدی برای سیال پایدار و تراکم پذیر:** تغییرات نسبت به زمان صفر است.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

✓ **معادله پیوستگی سه بعدی برای سیال پایدار و تراکم ناپذیر:**

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

به صورت برداری می توان نوشت که در آن i، j و k بردارهای واحد در راستای x، y و z هستند :

$$V = iu + jv + kw$$

$$V=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k \Rightarrow V \text{ دیفرانسیل از} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

✓ **معادله پیوستگی دو بعدی برای سیال پایدار و تراکم ناپذیر:**

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

✓سرعت و شتاب در جریان سه بعدی:

V بردار سرعت است و مولفه های سرعت در راستاهای x، y و z به ترتیب u، v و w می باشند که مولفه های سرعت می توانند توابعی از موقعیت فضایی و زمان باشند. منظور از موقعیت فضایی، همان مختصات طبق محورهای x، y و z است. از نظر ریاضی:

$$u = f_1(x,y,z,t) \qquad v = f_2(x,y,z,t) \qquad w = f_3(x,y,z,t)$$

$$V = iu + jv + kw = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

از طرفی اگر a_x، a_y و a_z مولفه های شتاب باشند، داریم:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}.dx + \frac{\partial u}{\partial y}.dy + \frac{\partial u}{\partial z}.dz + \frac{\partial u}{\partial t}.dt \Rightarrow \text{تقسیم بر } dt \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}.\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

می دانیم: $\frac{du}{dt} = a_x$

$$a_x = (u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} + w.\frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

که $(u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} + w.\frac{\partial u}{\partial z})$ شتاب جابه جایی و $\frac{\partial u}{\partial t}$ شتاب موضعی است.

به همین ترتیب داریم:

$$a_y = (u.\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y} + w.\frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_z = (u.\frac{\partial w}{\partial x} + v.\frac{\partial w}{\partial y} + w.\frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial w}{\partial t}$$

اگر جریان یک بعدی باشد:

$$V = f(x, t) \Rightarrow a = \frac{\partial v}{\partial t} + V.\frac{\partial v}{\partial x}$$

شتاب جابه جایی + شتاب موضعی = شتاب

$$\text{جریان پایدار} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$\text{جریان یکنواخت} = V.\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

- ✓ برای جریان پایدار یکنواخت، شتاب صفر است. $\Leftarrow a = 0$
- ✓ اگر جریان پایدار و غیریکنواخت باشد:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \ , \ V.\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow a = V.\frac{\partial v}{\partial x}$$

بردار شتاب:

$$A = ia_x + ja_y + ka_z = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

✓روش های تحلیل و بررسی جریان سیالات:

در معرفی و نمایش پدیده ها و به فرمول در آوردن آنها دو روش وجود دارد. روش اول، روش لاگرانژ است که در آن ذرات سیال به صورت انفرادی مورد بررسی قرار می گیرند. این روش، روش معمول در دینامیک سیالات است. در این سیستم، حرکت یک ذره دنبال شده و تغییرات سرعت، وزن مخصوص و سایر خصوصیات آن ذره نسبت به زمان مورد مطالعه قرار می گیرد. به عبارتی سیستم یا جرم کنترل تعریف می شود. بنابراین سرعت ذره با مشخص کردن بردار حرکتی یا بردار موقعیت ذره نسبت به زمان تعیین می گردد. با استفاده از دستگاه مختصات سه بعدی، بردار حرکت چنین نشان داده می شود:

$$r(t) = xi + yj + zk$$

که در آن i، j و k بردارهای واحد در راستاهای x، y و z هستند. سرعت ذره از مشتق گیری این بردارها نسبت به زمان حاصل می شود، یعنی:

$$V(t) = \frac{dx}{dt}.\,i + \frac{dy}{dt}.\,j + \frac{dz}{dt}.k \Rightarrow V(t) = ui + vj + wk$$

که u، v و w به ترتیب مولفه های سرعت در راستاهای x، y و z هستند.

البته حرکت یک ذره سیال برای تشریح تمامی حوزه جریان کفایت نخواهد کرد، لذا حرکت همزمان تمامی ذرات باید مورد توجه قرار گیرد. حرکت حوزه جریان از بکارگیری معادله حرکت $F = ma$ برای هر ذره جریان بدست می آید.

در روش دوم که حجم کنترل تعریف می شود، تمرکز بر روی یک نقطه ثابت در یک دستگاه مختصات و در حقیقت ملاحظه حرکت ذراتی است که از نقطه ای معین می گذرند، این روش به اولر معروف است. در این روش، سرعت ذرات سیال نسبت به زمان و موقعیت فضایی نقطه بستگی دارد، یعنی:

$$u = f_1(x, y, z, t) \ , \ v = f_2(x, y, z, t) \ , \ w = f_3(x, y, z, t)$$

در این روش، حرکت ذراتی را که از یک نقطه معین از فضا عبور می کند، مشاهده می شود در حالی که در سیستم قبلی، یک ذره متحرک در فضا دنبال شده و خصوصیات آن با زمان بررسی می شود. بعلاوه در این روش، برای تشریح حوزه جریان، باید تمام نقاط در حوزه جریان را مورد ملاحظه قرار داد و تغییرات خصوصیات آنها را با زمان مطالعه کرد. معادله قبلی مولفه های سرعت را به صورت توابعی از موقعیت فضایی و زمان بدست می دهد، ولی روشی دیگر در این سیستم وجود دارد که طی آن، سرعت بصورت تابعی از موقعیت نقطه در امتداد یک خط جریان و زمان می باشد:

$$V = f\,(s,t)$$

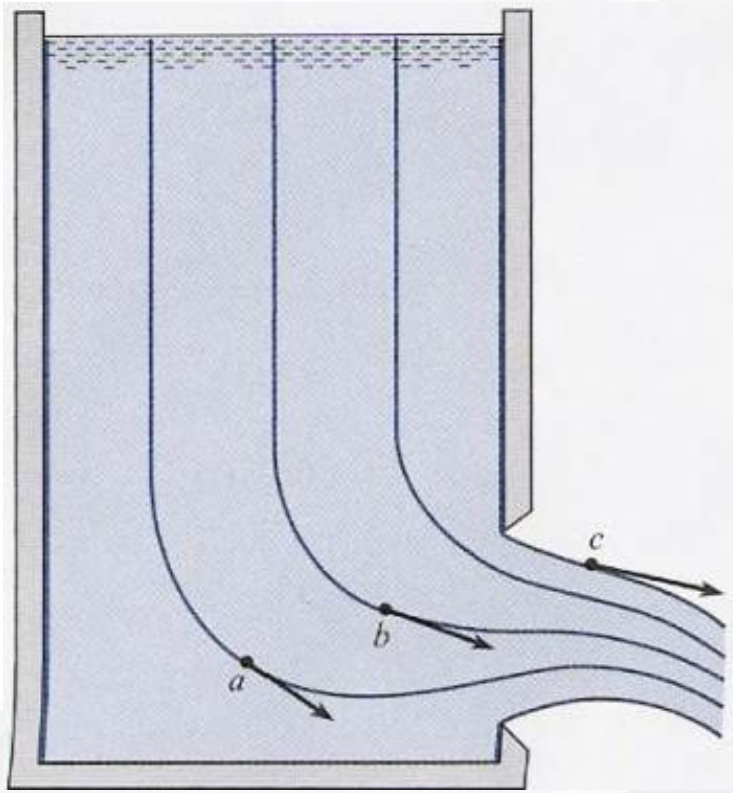
که در آن s مسیر خط جریان را مشخص می کند.

✓خطوط جریان و طرح جریان:

در بیشتر موارد، در حوزه حرکت سیال، تشکیل و ترسیم خطوطی که سرعت جهت حرکت را نشان دهند، مفید و مورد علاقه است و چنین شکلی را طرح جریان و خطوطی که توزیع حرکت را نشان دهند، خطوط جریان می نامند.

خطوط جریان بنا به تعریف عبارتند از خطوطی که در حوزه جریان به نحوی ترسیم شوند که تمامی نقاط بر بردار سرعت سیال در هر نقطه و در هر لحظه مماس باشند. در نتیجه، در هر نقطه، مماس بر خط جریان، جهت سرعت را در حوزه جریان نشان می دهد.

برای مثال جریان سیال از روزنه جدار یک تانک مطابق شکل مورد توجه می باشد. بردارهای سرعت در سه موقعیت مختلف ترسیم شده اند و نقاط نماینده این موقعیت ها با حروف a، b و c مشخص شده اند. بخوبی دیده می شود که طرح جریان، روش موثر و مفیدی برای نمایش هندسی جریان سیال است. در شکل دیده می شود که خطوط جریان، مماس بر لبه روزنه در بالا و پایین، بر جداره های تانک هم منطبق هستند. این تماس خطوط جریان با دیواره های تانک، مستقیما از تعریف و مفهوم خطوط جریان نتیجه گیری می شود. یعنی از آن جایی که جریانی از دیواره های تانک به داخل و یا خارج تانک اتفاق نمی افتد، خطوط جریان چسبیده به جدار باید به موازات آن باشند و یا مولفه ای از سرعت که بر جدار عمود است برابر صفر باشد.



همچنین می توان نشان داد که سرعت سیال توسط طرح جریان مشخص می شود.

بدین ترتیب که سرعت سیال (V) با فاصله بین خطوط جریان در جریان دو بعدی، به طور معکوس متناسب است.

اگر خطوط جریان: ۱) موازی هم باشند ← به صورت لایه ای یا ویسکوز ← جریان آرام

۲) در هم بروند ← جریان آشفته

۳) نوسانی باشند ← جریان انتقالی

✓ لوله جریان:

مجموعه ای از خطوط جریان که به صورت لوله فرض می شوند. وقتی درون یک لوله آب جریان دارد، در مرز لوله، سطح کنترل می شود و درون لوله حجم کنترل می شود.

Stream line ← خط جریان یا خط اثر یا خط رگه و خطی است که مشخص کننده ذرات عبوری از موقعیت ثابتی است که سیال در فضا باشد. (مانند آزمایش رینولدز)

path line ← یا خط مسیر نیز نامیده می شود و خطی است که نشان دهنده حرکات ممتد یک ذره مشخص در سیال باشد.

مثال: روغن با چگالی نسبی 0.9 و ویسکوزیته $0.17\ N.s/m^2$ بوسیله یک پمپ درون یک لوله با قطر 75 mm به جریان در می آید.

شدت جریان جرمی 2.7 kg/s می باشد. آیا جریان آرام است یا آشفته؟

حل:

$$\dot{m} = \rho Q \Rightarrow Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{2.7}{900} = 0.003 \quad m^3/s$$

$$Q = VA \Rightarrow V = \frac{Q}{A} = \frac{0.003}{\pi \times 0.0375^2} = 0.68 \quad m/s$$

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{0.9 \times 1000 \times 0.075 \times 0.68}{0.17} = 270 < 2000 \Rightarrow$$ جریان آرام

مثال: اگر سرعت بحرانی هوا درون یک لوله به قطر 125 mm برابر با 0.234 m/s باشد، عدد رینولدز بحرانی برای هوا چقدر است؟ سرعت بحرانی برای آب در همین لوله را بدست آورید. ویسکوزیته سینماتیکی برای هوا برابر 1.46×10^{-5} m^2/s و برای آب 1.1×10^{-6} m^2/s می باشد.

حل:

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.234 \times 0.125}{1.46 \times 10^{-5}} = 2003.42 \quad , \quad 2003.42 = \frac{V \times 0.125}{1.1 \times 10^{-6}} \Rightarrow 0.0175 \quad m/s$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

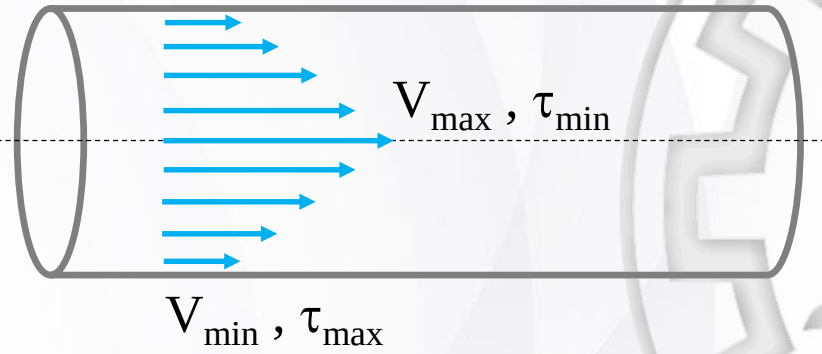
✓ پروفایل سرعت در یک لوله:

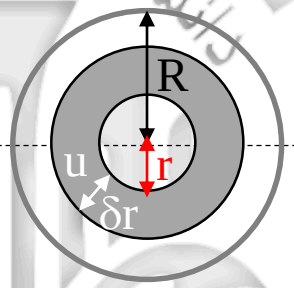
یک لوله در نظر بگیرید که در آن سیالی در حال حرکت است. مطابق شکل، سرعت در دیواره ها صفر و در مرکز لوله بیشینه است. در مقابل، تنش برشی در دیواره ها بیشینه و در مرکز لوله صفر است. توجه داریم که در لوله تقارن وجود دارد، یعنی لایه بالایی و پایینی سرعت یکسان دارند و تنش را خنثی می کنند. پس V که در رابطه $Q = VA$ به صورت متوسط تعریف می شود.

اگر u سرعت در شعاع r باشد، جریان δQ از درون المان حلقوی با شعاع r و ضخامت δr خواهد بود:

δQ = سطح مقطع عنصر × سرعت

$$\delta Q = 2\pi r \delta r \times u$$





برای کل سطح لوله $Q = 2\pi \int_0^R urdr$

چون المان کوچک است، سرعت ثابت فرض می شود.

مثال: یک جریان آرام در لوله ای به قطر داخلی 10 cm و سرعت بر حسب m/s، توسط رابطه ای مانند $u = 20\ (1 - (\frac{r}{R})^2)$ تعریف شده است. r فاصله از مرکز و R شعاع لوله است. شدت جریان حجمی و متوسط سرعت را محاسبه کنید.

حل:

$$Q = 2\pi \int_0^R 20\ (1 - (\frac{r}{R})^2)\ rdr = 10\pi R^2 = 10 \times \pi \times (0.05)^2 = 0.078 \ \ m^3/s$$

$$V = Q/A = 10\pi R^2 / \pi R^2 = 10 \quad m/s$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

مثال: توزیع سرعت برای یک جریان تراکم ناپذیر و پایدار به صورت زیر داده شده:

$u = 3 - x$ $\quad v = 4 + 2y$ $\quad w = 2 - z$

ثابت کنید در معادله پیوستگی صدق می کند.

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow -1 + 2 - 1 = 0$$

مثال: یک لوله با قطر 40 cm که در آن آب جریان دارد، به دو لوله با قطر 30 cm و 20 cm منشعب می شود. اگر متوسط سرعت در لوله 40 cm برابر 3 m/s باشد، مطلوب است محاسبه شدت جریان حجمی و همچنین متوسط سرعت در لوله 20 cm چنانچه متوسط سرعت در لوله 30 cm برابر 2 m/s باشد.

حل:

$$Q = VA$$

$$Q_{40} = 3 \times \pi \times (0.2)^2 = 0.377 \quad m^3/s$$

$$Q_{30} = 2 \times \pi \times (0.15)^2 = 0.141 \quad m^3/s$$

$$Q_{20} + Q_{30} = Q_{40} \Rightarrow Q_{20} = Q_{40} - Q_{30}$$

$$\Rightarrow Q_{20} = 0.377 - 0.141 = 0.236 \ \ m^3/s$$

$$V = Q/A = 0.236 / \pi\,(0.1)^2 = 7.516 \ \ m/s$$

مثال: معادله پیوستگی برای جریان سه بعدی با استفاده از محور مختصات قائم را بدست آورید. سرعت در طول محور مرکزی شیپوره به طول L با معادله زیر نشان داده شده است:

$$U = 2t\,(1 - 0.5\,\frac{x}{L})^2$$

جایی که U بر حسب m/s و t زمان بر حسب s از شروع جریان است. x فاصله از ورودی شیپوره است. شتاب جابه جایی و شتاب موضعی را وقتی که $t = 3s$، $x = \frac{1}{2}L$ و $L = 0.8\ m$ را بدست آورید.

حل: اثبات در اسلایدهای ۱۰، ۱۱ و ۱۲ موجود است.

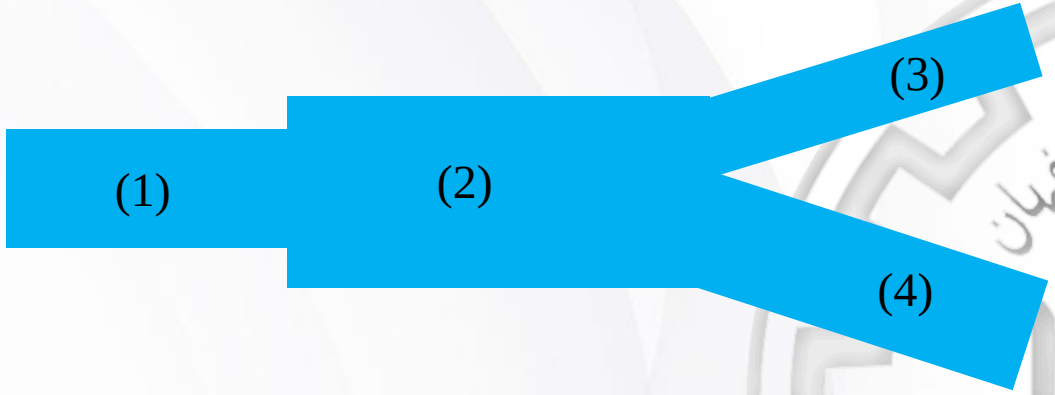
شتاب جابه جایی : $u.\frac{\partial u}{\partial x} = \{2t\,(1 - 0.5\,\frac{x}{L})^2\}.\{2t.2\,(1 - 0.5\,\frac{x}{L})(-\frac{0.5}{L})\} \Rightarrow u.\frac{\partial u}{\partial x} = -\,18.98 \ \ m/s^2$

شتاب موضعی : $\frac{\partial u}{\partial t} = 2t\,(1 - 0.5\,\frac{x}{L})^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 2\,(1 - 0.5\,\frac{x}{L})^2 = 1.125 \ \ \ m/s^2$

مثال: آب درون یک لوله به شکل زیر جریان دارد.

مطلوب است محاسبه $Q_1, V_1, Q_2, Q_3, d_3, Q_4, V_4$

$d_1 = 50$ mm, $V_2 = 2$ m/s, $d_2 = 75$ mm, $Q_3 = 2Q_4$, $V_3 = 1.5$ m/s, $d_4 = 30$ mm



حل:

$$Q_2 = V_2 A_2 = \pi r^2 \times V_2 = 8.8 \times 10^{-3} \ m^3/s$$

$$Q_1 = Q_2 = 8.8 \times 10^{-3} \ m^3/s$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{8.8 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.05^2} = 1.121 \ m/s$$

$$Q_3 + Q_4 = Q_2 \Rightarrow 2Q_4 + Q_4 = Q_2 \Rightarrow Q_4 = \frac{Q_2}{3} = 2.93 \times 10^{-3} \ m^3/s \ , \ Q_3 = 2Q_4 = 5.86 \times 10^{-3} \ m^3/s$$

$$5.86 \times 10^{-3} = 1.5 \times \pi \left(\frac{d_3}{2}\right)^2 \Rightarrow d_3 = 0.071 \ m \qquad 2.93 \times 10^{-3} = V_4 \times \pi \ (0.015)^2 \Rightarrow V_4 = 4.17 \ m/s$$

مثال: بردار سرعت برای جریان یک سیال توسط معادله زیر تعریف شده است:

$$V = 2x^3 i - 5xyj + 4tk$$

مطلوب است محاسبه سرعت و شتاب ذره در مختصات (1,2,3) و $t = 1$ s.

حل:

$V = ui + vj + kw \Rightarrow u = 2x^3 = 2 \; , \; v = -5xy = -10 \; , \; w = 4t = 4$

$V = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 4^2} = 10.952 \quad m/s$

$a_x = (u.\frac{\partial u}{\partial x} + v.\frac{\partial u}{\partial y} + w.\frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow a_x = (2x^3.6x^2) + 0 + 0 + 0 = 12 \quad m/s^2$

$a_y = (u.\frac{\partial v}{\partial x} + v.\frac{\partial v}{\partial y} + w.\frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow a_y = (2x^3.(-5y)) + ((-5xy)(-5x)) + 0 + 0 = 30 \quad m/s^2$

$a_z = (u.\frac{\partial w}{\partial x} + v.\frac{\partial w}{\partial y} + w.\frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial w}{\partial t} \Rightarrow a_z = 0 + 0 + 0 + 4 = 4 \quad m/s^2$

$a = 12i + 30j + 4k \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 32.56 \quad m/s^2$

مثال: سرعت یک جریان به وسیله معادله زیر داده شده است:

$V = (xy^2)i + (-2yz^2)j + (\frac{2}{3}z^3 - zy^2)k$

نشان دهید معادله فوق از معادله پیوستگی سه بعدی پیروی می کند.

حل:

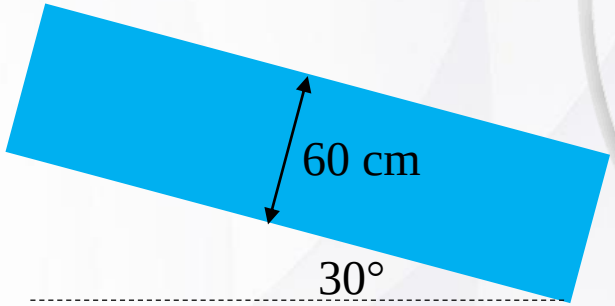
$$V = ui + vj + kw \Rightarrow u = xy^2 \ , v = -2yz^2 \ , w = \frac{2}{3}z^3 - zy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \ , \frac{\partial v}{\partial y} = -2z^2 \ , \ \frac{\partial w}{\partial z} = 2z^2 - y^2 \Rightarrow y^2 - 2z^2 + 2z^2 - y^2 = 0$$

پس در معادله پیوستگی صدق می کند.

مثال: آب در یک کانال با شیب 30 درجه مطابق شکل جریان دارد. اگر سرعت ثابت و برابر 12 m/s و جریان به طور یکنواخت با عمق 60 cm در طول کانال جریان داشته باشد. شدت جریان حجمی را به ازای واحد عرض کانال محاسبه کنید.

حل:



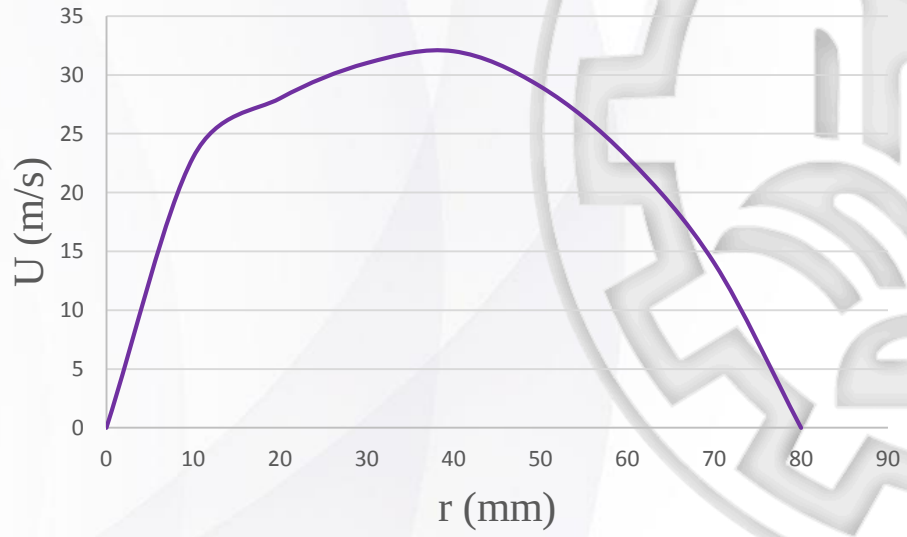
$$A = 1 \times 0.6 \times \cos 30 = 0.52 \ \ m^2$$

$$Q = VA = 12 \times 0.52 = 6.235 \ \ m^3/s$$

مثال: هوا از میان دو صفحه موازی که 80 mm با هم فاصله دارند، با توزیع زیر حرکت می کند. مطلوب است محاسبه Q و رسم نمودار

سرعت برای این جریان:

فاصله از یک لبه (mm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
سرعت (m/s)	0	23	28	31	32	29	23	14	0



حل:

جهت بدست آوردن Q باید سطح زیر منحنی را بدست آورد.

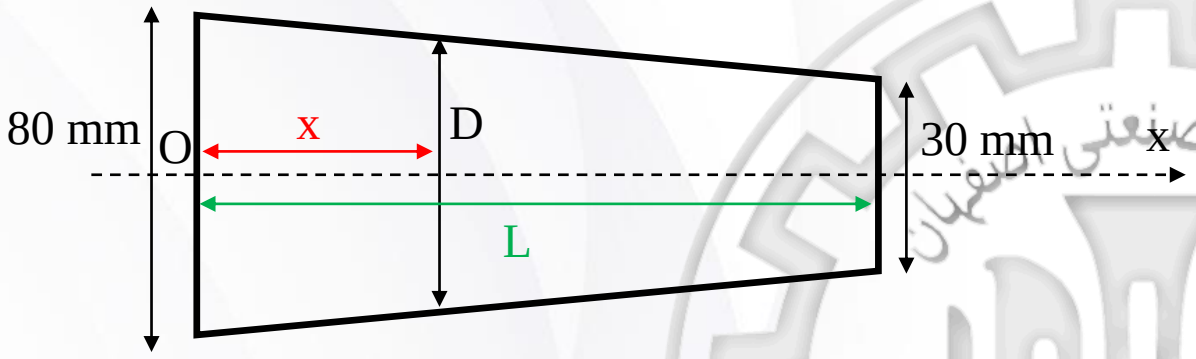
$$Q = VA$$

مثال: یک نازل که قطر پایه آن 80 mm و قطر نوک آن 30 mm می باشد با دبی 10 l/s سیال را تخلیه می کند. عبارتی برای سرعت

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

سیال در امتداد محور نازل بدست آورید. فاصله x را در امتداد محور و از صفحه منطبق بر قطر بزرگتر در نظر بگیرید.

حل:



قطر D در فاصله x از محور ox:

$$D_x = 0.08 - \frac{0.08 - 0.03}{L} x = 0.08 - 0.05.\frac{x}{L}$$

$$A_x = \pi.\frac{D_x^2}{4} = \frac{\pi}{4}(0.08 - 0.05.\frac{x}{L})^2$$

$$V_x = \frac{Q}{A_x} = \frac{0.01}{\frac{\pi}{4}(0.08 - 0.05.\frac{x}{L})^2} = 0.0127.(0.08 - 0.05.\frac{x}{L})^{-2}$$

تکالیف:

۱) لوله ای با قطر داخلی 3 cm برای پمپ کردن مایعی به مخزن مورد استفاده قرار می گیرد. قطر این مخزن استوانه ای شکل 1.5 m و ارتفاع آن 3 m است. دانسیته مایع $1040\ kg/m^3$ بوده و دارای گرانروی $1600 \times 10^{-6}\ Pa.s$ می باشد. مطلوب است بیشترین زمان لازم برای آن که مخزن در شرایط متلاطم توسط لوله پر شود.

۲) در لوله ای به قطر 5 cm هوا در چه سرعتی قادر خواهد بود تا از جریان آرام به انتقالی تغییر حالت دهد. دانسیته هوا برابر $1.164\ kg/m^3$ و گرانروی آن معادل $18.240 \times 10^{-6}\ Pa.s$ می باشد.

۳) سرعت جریان حجمی آب جوی در یک لوله معادل 1.8 l/s است. قطر داخلی لوله 3 cm است. دانسیته آب $1100\ kg/m^3$ می باشد. سرعت متوسط آب و دبی جرمی آن را بر حسب kg/s بدست آورید.

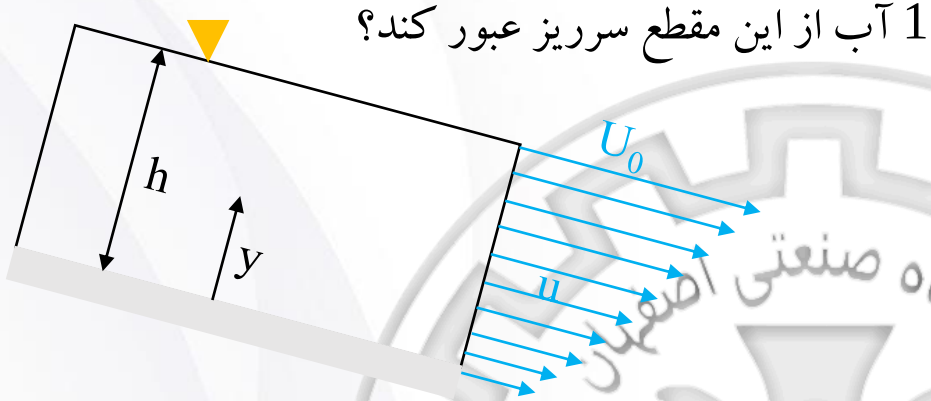
۴) یک میدان سرعت توسط رابطه: $V = 5xi + (15y+11)j + 19t^2k$ ارائه می شود. سرعت و شتاب ذره در عبور از نقطه (4,6,2) در زمان $t = 3s$ را حساب کنید.

۵) هوا در یک لوله با سرعت یکنواخت $V = 5t^2i$ جریان دارد. که در آن t بر حسب ثانیه است. مقدار شتاب در زمان های $t = -1\ s$ و $t = 1s$ را محاسبه کنید.

۶) نیمرخ سرعت جریان آب گذرنده از یک سرریز به طور تقریبی از رابطه زیر بدست می آید: (شکل در اسلاید بعد)

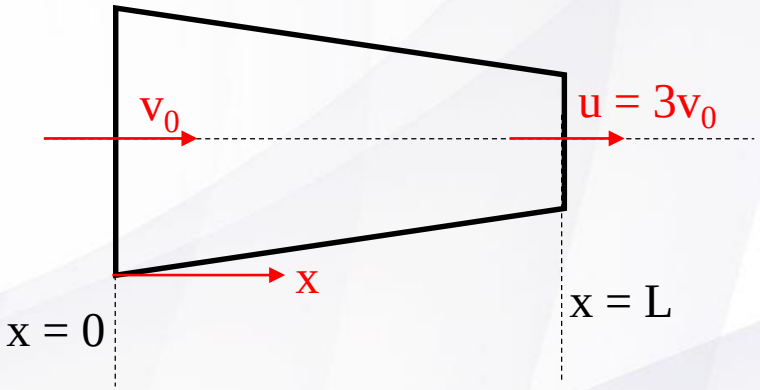
$$u = U_0\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{7}}$$

که در آن $y = 0$ نقطه کف سرریز و h عمق آب است. اگر $U_0 = 1.4\ m/s$ و $h = 3\ m$ و عرض جریان $17\ m$ باشد، چند دقیقه طول می کشد تا $10^5\ m^3$ آب از این مقطع سرریز عبور کند؟



۷) جریان در یک نازل همگرا را می توان تقریبا شبیه جریان یک بعدی با سرعت $u = u(x)$ در نظر گرفت. فرض کنید که سرعت به طور خطی از $u = v_0$ در ورودی به سرعت $u = 3v_0$ در خروجی تغییر می کند:

$$u(x) = v_0(1+\frac{2x}{L}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2v_0}{L}$$



الف) شتاب $\frac{Du}{dt}$ را به صورت تابعی کلی بر حسب x حساب کنید.

ب) اگر $v_0 = 10\ m/s$ و $L = 1\ m$ باشد، مقدار $\frac{Du}{dt}$ را در ورودی و خروجی تعیین کنید.