



کامپوزیت های پیشرفته

استاد درس
دکتر علی زادهوش

فصل سوم

آنالیز مکانیکی کامپوزیت های الیاف بلند
(میکرومکانیک)

□ رفتار مکانیکی مواد مرکب تک لایه

بررسی مواد مرکب تک لایه بستگی به چگونگی عملکرد الیاف آن لایه دارد. در این بخش به بررسی قانون هوک (ارتباط تنش - کرنش) و پارامترهای مؤثر در اجسام ایزوتروپ، ارتوتروپ و غیر ایزوتروپ می پردازیم.

■ انواع ماده

اغلب مواد مهندسی، همگن و ایزوتروپ می باشند. یک جسم همگن دارای خواص یکنواخت در تمام نقاط جسم می باشد و خواص ماده تابعی از موقعیت نقاط آن نمی باشد. مواد مرکب در حالت کلی غیر همگن و غیر ایزوتروپ هستند.

○ جسم ایزوتروپ

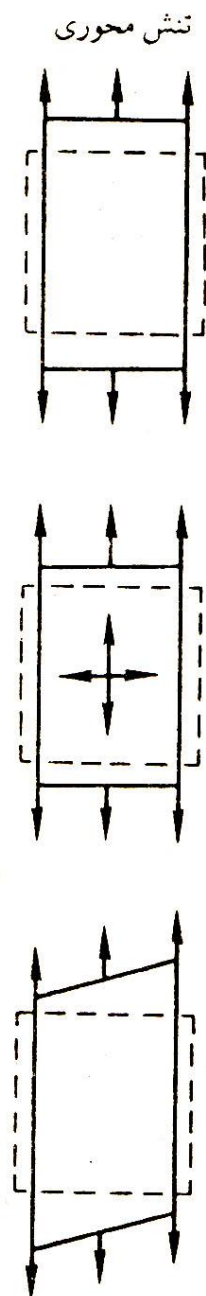
ماده ایزوتروپ ماده ای است که رفتار آن مستقل از جهت بوده و تنشهای نرمال تنها منجر به ایجاد کرنشهای نرمال شده و تنشهای برشی خالص تنها منجر به ایجاد کرنش برشی می شود. به عبارت دیگر هنگام اعمال نیروی محوری هیچگونه تغییر زاویه ای بین دو وجه مجاور قطعه ایجاد نمی شود و هنگام اعمال تنش برشی خالص هیچگونه تغییر طولی مشاهده نمی شود.

○ جسم غیر ایزوتروپ

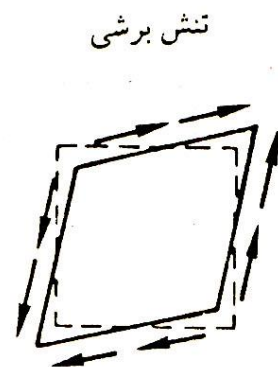
ماده غیر ایزوتروپ ماده ای است که خواص آن وابسته به جهت گیری ماده است. در مواد غیر ایزوتروپ، اعمال تنش نرمال نه تنها باعث ازدیاد طول در جهت اعمال نیرو و کاهش طول در جهت عمود بر آن می شود بلکه باعث یک تغییر شکل برشی نیز می گردد. همچنین اعمال تنش برشی نه تنها باعث تغییر شکل برشی می شود بلکه در کم و زیاد شدن طول تأثیر دارد.

○ جسم اورتوتروپیک

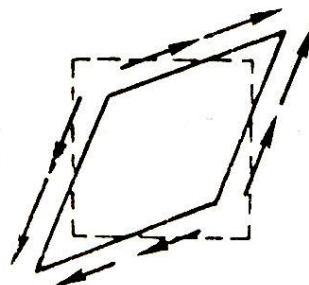
جسم اورتوتروپ دارای خواص مواد مختلف در سه جهت عمود بر هم در یک نقطه از جسم می باشد و یا به بیان دیگر جسم اورتوتروپ در هر نقطه از جسم دارای سه صفحه تقارن عمود بر هم می باشد. در مواد اورتوتروپ اگر تنشهای نرمال در جهت محورهای اصلی ماده اعمال شوند، رفتاری همانند مواد ایزوتروپ از خود نشان می دهند اما کم و زیاد شدن طول در جهات عمود بر هم می تواند با مواد ایزوتروپ تحت بار مشابه و مدول الاستیسیته برابر در جهت اعمال تفاوت داشته باشد. تغییر شکل برشی این مواد نیز به واسطه تغییرات مدول الاستیسیته و ضریب پواسون با مواد ایزوتروپ متفاوت می باشد.



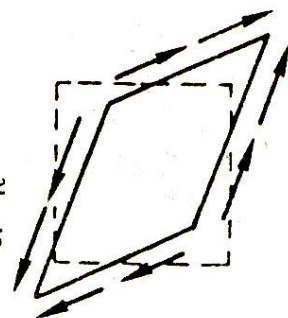
مواد ایزوتروپیک



مواد ارتوتروپیک
تنش نرمال در جهت محورهای
ارتوتروپ می باشد



مواد غیر ایزوتروپیک
یا مواد ارتوتروپیک در صورتیکه
تنش نرمال در جهت محورهای
اصلی جسم نباشد



شکل ۱: رفتار مکانیکی مواد

❖ آنالیز مکانیکی یک تک لایه

برای مطالعه و بحث بیشتر درباره خواص مواد مرکب باید دو جنبه اصلی یعنی خصوصیات مکانیک ذرات (میکرومکانیک) و مکانیک خود جسم (ماکرومکانیک) مورد بررسی قرار گیرد. مکانیک ذرات به بررسی رفتار مواد مرکب در مقیاس میکروسکوپی پرداخته و خواص مواد تشکیل دهنده را مورد بررسی قرار می‌دهد. ماکرومکانیک به بررسی رفتار مواد مرکب با فرض هموزن بودن پرداخته و تأثیرات مواد تشکیل دهنده در خصوصیات مواد مرکب را در نظر دارد.

۱. میکرومکانیک تک لایه ← از خواص اجزا به خواص کلی میرسیم
۲. ماکرومکانیک تک لایه ← نمونه را به صورت هموزن بررسی می‌کنیم.
۳. ماکرومکانیک چند لایه

▪ اهداف آنالیز میکرومکانیک تک لایه عبارتند از:

۱. به دست آوردن روابطی برای کسر حجمی و کسر وزنی برای الیاف و ماتریس، کسر حباب و دانسیته کامپوزیت



۲. به دست آوردن ثابت های سفتی برای یک تک لایه تک محور از روش مقاومت مصالح:

E_1 : مدول طولی محور لیف

E_2 : مدول کششی عرضی (عمود بر لیف)

ν_{12} : نسبت پواسون اصلی (محور اصلی لیف)

G_{12} : مدول برشی اصلی

۳. به دست آوردن ثابت های سفتی از روش تجربی

روش های تجربی

۱. Halpin Tsai

۲. Stress Partioning

۳. Chamis

۴. Ekvall

۵. Brintrup

۶. Adams & Doner



۴. به دست آوردن ثابت های سفتی از روش الاستیسیته
۵. به دست آوردن استحکام نهایی برای تک لایه تک جهت

۱. σ_1^T : استحکام طولی کششی

۲. σ_1^C : استحکام طولی پرسی

۳. σ_2^T : استحکام عرضی کششی

۴. σ_2^C : استحکام عرضی پرسی

۵. τ_{12} : استحکام برشی

۶. معیار های شکست نهایی برای یک تک لایه

۷. مکانیسم انتقال تنش به الیاف

۱. α_1 : ضریب انبساط حرارتی طولی

۲. α_2 : ضریب انبساط حرارتی عرضی

۷. ضریب انبساط رطوبتی

۱. β_1 : ضریب انبساط رطوبتی طولی

۲. β_2 : ضریب انبساط رطوبتی عرضی

یکی از مهمترین خصوصیات مواد مرکب که به طراح در بهینه کردن سازه کمک می کند، امکان تغییر در نوع، جهت و درصد الیاف یک تک لایه می باشد. با این تغییرات، خصوصیات میکرومکانیک ماده مرکب نیز تغییر می کند. از این رو در به دست آوردن ثابتهای مدول الاستیک تک لایه سه روش اصلی را می توان مورد بحث قرار داد:

۱. روش مقاومت مصالح (تقریبی)

۲. روش های تجربی

۳. روش های دقیق (مثل روش الاستیسیته)

اگر حجم، دانسیته و کسر حجمی کامپوزیت، ماتریس و الیاف را به صورت زیر نشان دهیم، با توجه به رابطه (۳-۱) کسر حجمی لیف و ماتریس از رابطه (۳-۲) به دست می آیند.

حجم کامپوزیت، حجم الیاف، حجم ماتریس = $V_{c.f.m}$

دانسیته کامپوزیت، دانسیته الیاف، دانسیته ماتریس = $\rho_{c.f.m}$

کسر حجمی کامپوزیت، کسر حجمی الیاف، کسر حجمی ماتریس = $v_{c.f.m}$

$$V_c = V_f + V_m \quad (3-1)$$

$$v_f = \frac{V_f}{V_c}$$

$$v_m = \frac{V_m}{V_c}$$

$$v_f + v_m = 1 \quad (3-3)$$

(۳-۲)



اگر وزن و کسر وزنی کامپوزیت، ماتریس و الیاف را به صورت زیر نشان دهیم، با توجه به رابطه (۴-۳)، کسر وزنی لیف و ماتریس از رابطه (۵-۳) به دست می آیند.

وزن کامپوزیت، حجم الیاف، حجم ماتریس = $W_{c.f.m}$

کسر وزنی کامپوزیت، کسر حجمی الیاف، کسر حجمی ماتریس = $W_{c.f.m}$

$$W_c = W_f + W_m \quad (۳-۴)$$

$$w_f = \frac{W_f}{W_c} \quad (۳-۵)$$

$$w_m = \frac{W_m}{W_c}$$



$$w_f + w_m = 1$$

و همچنین داریم:
(۳-۶)

$$W_c = \rho_c V_c$$

$$W_f = \rho_f V_f$$

$$W_m = \rho_m V_m$$

از طرفی طبق تعریف دانسیته داریم:
(۳-۷)

با استفاده از معادلات فوق کسر وزنی لیف و ماتریس به صورت زیر بر حسب دانسیته الیاف، ماتریس و کامپوزیت به دست می آید:

$$w_f = \frac{\rho_f}{\rho_c} v_f$$

$$w_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} v_m$$

(۳-۸)



و بر حسب کسر حجمی الیاف و ماتریس می توان روابط کسر وزنی را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$w_f = \frac{\frac{\rho_f}{\rho_m} v_f}{\frac{\rho_f}{\rho_m} v_f + v_m} v_f$$

$$w_m = \frac{1}{\frac{\rho_f}{\rho_m} (1 - v_m) + v_m} v_m$$

(۳-۹)



باتوجه به رابطه (۲-۴) دانسیته کامپوزیت به صورت زیر بر حسب کسر وزنی به دست می آید:

$$W_c = W_f + W_m \quad (۳-۱۰)$$

$$\rho_c V_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m$$

$$\rho_c = \rho_f \frac{V_f}{V_c} + \rho_m \frac{V_m}{V_c}$$

$$\rho_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m \quad (۳-۱۱)$$

دانسیته بر حسب کسر وزنی نیز از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{\rho_c} = \frac{w_f}{\rho_f} + \frac{w_m}{\rho_m} \quad (۳-۱۲)$$



جدول (۱-۳) انواع خواص الیاف (در سیستم SI)

TABLE 3.1

Typical Properties of Fibers (SI System of Units)

Property	Units	Graphite	Glass	Aramid
Axial modulus	GPa	230	85	124
Transverse modulus	GPa	22	85	8
Axial Poisson's ratio	—	0.30	0.20	0.36
Transverse Poisson's ratio	—	0.35	0.20	0.37
Axial shear modulus	GPa	22	35.42	3
Axial coefficient of thermal expansion	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	-1.3	5	-5.0
Transverse coefficient of thermal expansion	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	7.0	5	4.1
Axial tensile strength	MPa	2067	1550	1379
Axial compressive strength	MPa	1999	1550	276
Transverse tensile strength	MPa	77	1550	7
Transverse compressive strength	MPa	42	1550	7
Shear strength	MPa	36	35	21
Specific gravity	—	1.8	2.5	1.4



جدول (۲-۳) انواع خواص ماتریس ها (در سیستم SI)

TABLE 3.2

Typical Properties of Matrices (SI System of Units)

Property	Units	Epoxy	Aluminum	Polyamide
Axial modulus	GPa	3.4	71	3.5
Transverse modulus	GPa	3.4	71	3.5
Axial Poisson's ratio	—	0.30	0.30	0.35
Transverse Poisson's ratio	—	0.30	0.30	0.35
Axial shear modulus	GPa	1.308	27	1.3
Coefficient of thermal expansion	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	63	23	90
Coefficient of moisture expansion	$\text{m}/\text{m}/\text{kg}/\text{kg}$	0.33	0.00	0.33
Axial tensile strength	MPa	72	276	54
Axial compressive strength	MPa	102	276	108
Transverse tensile strength	MPa	72	276	54
Transverse compressive strength	MPa	102	276	108
Shear strength	MPa	34	138	54
Specific gravity	—	1.2	2.7	1.2

یک تک لایه شیشه / اپوکسی درارای ۷۰٪ حجمی الیاف می باشد. با استفاده از جدول های ۱-۳ و ۲-۳ دانسیته تک لایه، کسر وزنی الیاف شیشه و ماتریس اپوکسی، حجم لایه کامپوزیت اگر جرم آن ۴ kg باشد به دست آورید.



حباب ممکن است دانسیته محاسبه شده تئوری برای کامپوزیت را به طور غلط افزایش دهد و از طرف دیگر ممکن است بر خواص مکانیکی مانند سفتی و استحکام برشی و تراکمی، خستگی و مقاومت جذب رطوبت اثر بگذارد.

$$V_v = \frac{V_v}{V_c}$$

(۳-۱۳)

$$V_c = V_f + V_m + V_v$$

(۳-۱۴)

اگر ρ_{ce} دانسیته تجربی کامپوزیت و ρ_{ct} دانسیته تئوری کامپوزیت باشد، داریم:

$$V_c = \frac{W_c}{\rho_{ce}} \quad (۳-۱۵)$$

$$V_f + V_m = \frac{W_c}{\rho_{ct}} \quad (۳-۱۶)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{W_c}{\rho_{ce}} = \frac{W_c}{\rho_{ct}} + V_v$$

و حجم حباب از رابطه زیر به دست می آید:

$$V_v = \frac{W_c}{\rho_{ce}} \left(\frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}} \right) \quad (3-17)$$

با جایگذاری در معادلات (3-14) و (3-15) خواهیم داشت:

$$V_v = \frac{V_v}{V_c} = \frac{\rho_{ct} - \rho_{ce}}{\rho_{ct}} \quad (3-18)$$



یک کامپوزیت اپوکسی / گرافیت دارای حباب با ابعاد $a \times b \times c$ و جرم M_c می باشد. پس از قرار گرفتن در اسید سولفوریک و هیدروژن پراکسید جرم الیاف به دست آمده M_f است. از آزمایش های تجربی دیگر دانسیته الیاف و ماتریس ρ_f و ρ_m به دست آمده است. مطلوب است به دست آوردن رابطه ای برای کسر حجمی حباب بر حسب $a, b, c, M_c, M_f, \rho_f, \rho_m$.

پیش فرض هایی در محاسبات به روش مقاومت مصالح وجود دارد که ابتدا لازم است به آنها بپردازیم:

(۱) لایه کامپوزیت:

به طور ماکروسکوپیک همگن باشد، الاستیک خطی باشد، به طور ماکروسکوپیک ارتوتروپیک باشد و عاری از تنش های اولیه باشد.

تنش اولیه: منظور همان تنش های باقی مانده می باشد. به عبارت دیگر علاوه بر تنشی که می خواهیم وارد کنیم، این تنش ها نیز وجود دارد. این تنش های اولیه در حین مراحل گرم و سرد کردن به وجود می آیند زیرا الیاف و ماتریس به دو نوع مختلف سرد می شوند و تنش به وجود می آید.

(۲) الیاف:

به طور ماکروسکوپیک همگن باشند، الاستیک خطی باشد، ایزوتروپیک باشد، ۱۰۰٪ در فاصله معین و هم جهت و هم سو قرار گرفته باشند.

(۳) ماتریس:

به طور ماکروسکوپیک همگن باشند، الاستیک خطی باشد، ایزوتروپیک باشد. کامپوزیت نباید دارای میکروترک، ترک و حباب باشد.



تعیین روابطی برای چهار ثابت الاستیک سفتی به روش مقاومت مصالح
چهار ثابت الاستیک سفتی عبارتند از:

$$\text{مدول یانگ طولی} = E_0 = E_L = E_{\perp} = E_1$$

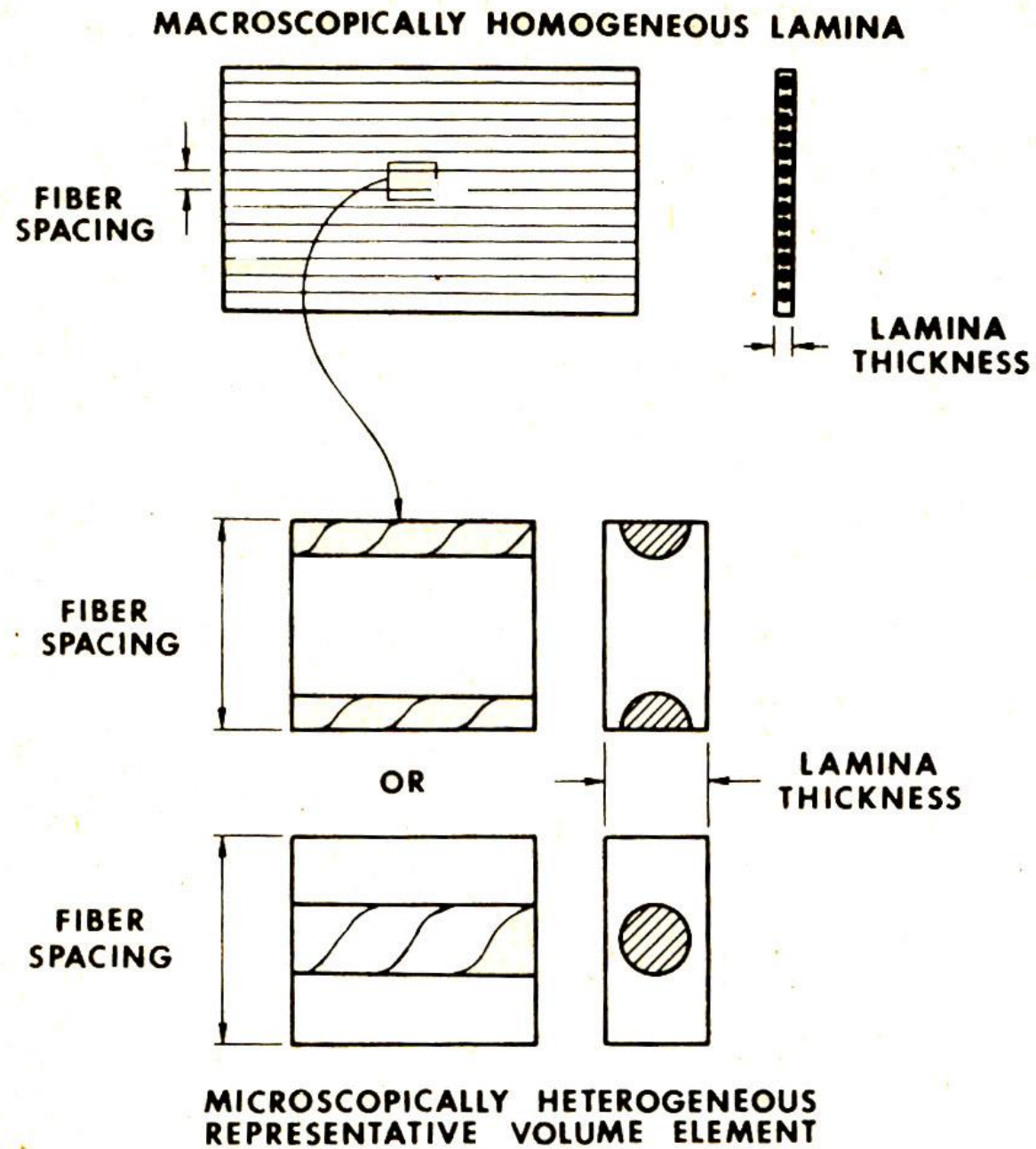
$$\text{مدول یانگ عرضی} = E_{90} = E_T = E_{\parallel} = E_2$$

$$\text{نسبت پواسون اصلی} = \nu_{12}$$

$$\text{مدول برشی صفحه ای} = G_{12}$$

در روش مقاومت مصالح یک المان حجمی نمونه (RVE) مطابق شکل ۲ در نظر گرفته می شود.

- عرض کامپوزیت = h
- ضخامت الیاف، ماتریس و کامپوزیت = t_c, t_m, t_f
- سطح الیاف، ماتریس و کامپوزیت = A_c, A_m, A_f



شکل ۲: المان حجمی یک تک لایه



$$A_c = t_c h$$

$$A_f = t_f h$$

$$A_m = t_m h$$

(۳-۱۹)

کسر حجمی با استفاده از روابط بالا به صورت زیر به دست می آید:

$$v_f = \frac{A_f}{A_c} = \frac{t_f}{t_c}$$

$$v_m = \frac{A_m}{A_c} = \frac{t_m}{t_c} = 1 - v_f \quad (۳-۲۰)$$

پیوند میان ماتریس و الیاف بی عیب و نقص باشد. مدول الاستیک، قطرها، فاصله میان الیاف یکنواخت باشد، الیاف پیوسته، موازی و بدون شکست باشند و از قانون هوک پیروی کنند به عبارت دیگر الاستیک باشد.

❖ تعیین مدول طولی کامپوزیت (E_1)

برای به دست آوردن مدول طولی المان حجمی نشان داده شده در شکل ۳ را در نظر بگیرید که تحت تأثیر یک نیروی تک جهت F_c که توسط الیاف و ماتریس به صورت F_f و F_m تحمل می شود را در نظر بگیرید. نیروی وارده بر کامپوزیت برابر مجموع نیروهای وارده بر الیاف و ماتریس است. بنابراین خواهیم داشت:

$$F_c = F_f + F_m \quad (3-21)$$

از طرف دیگر:

$$F_c = \sigma_c A_c$$

$$F_f = \sigma_f A_f \quad (3-22)$$

$$F_m = \sigma_m A_m$$



تنش کامپوزیت، لیف و ماتریس = $\sigma_m, \sigma_f, \sigma_c$

سطح الیاف، ماتریس و کامپوزیت = A_c, A_m, A_f

با فرض الاستیک بودن الیاف و ماتریس و ایزوتروپ بودن آنها خواهیم داشت:

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c$$

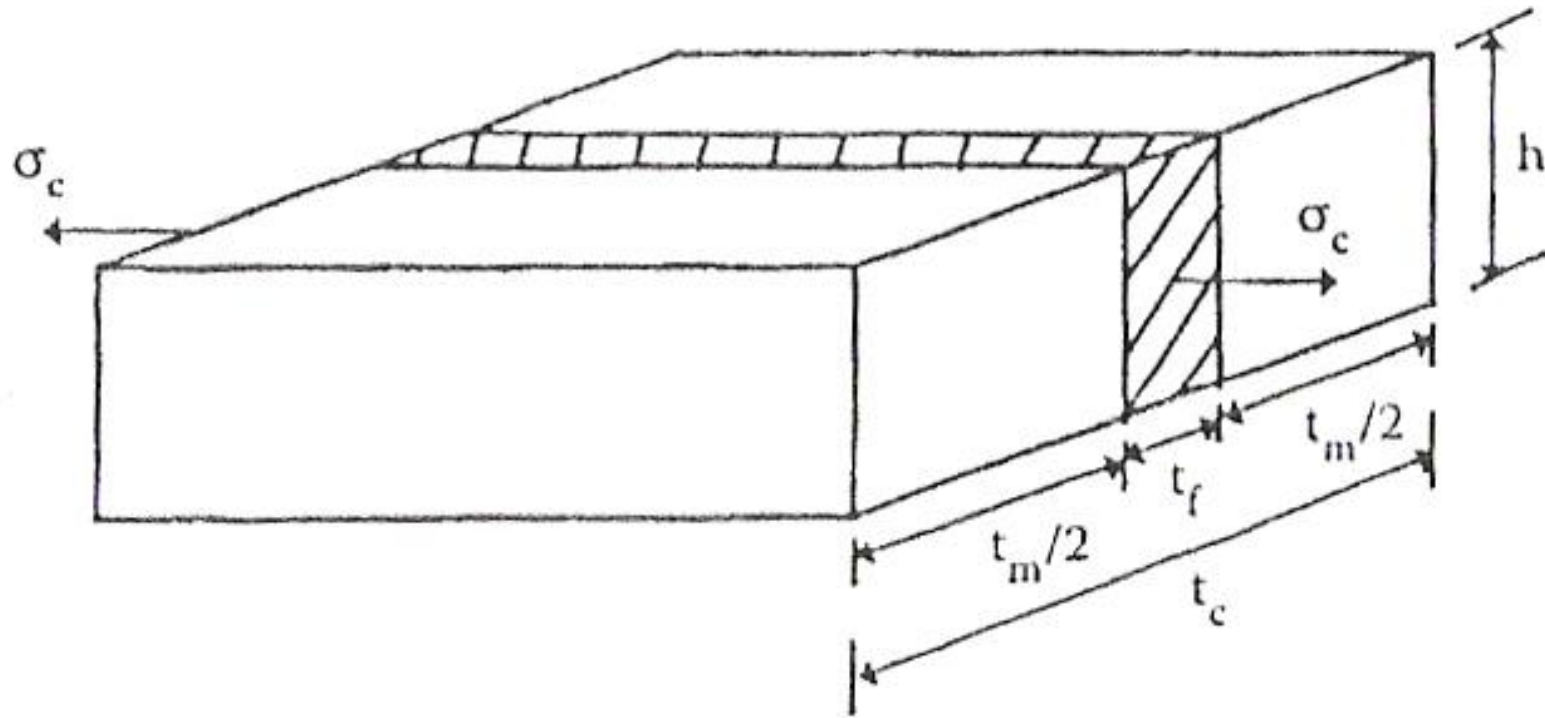
$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m$$

(۳-۲۳)

کرنش در کامپوزیت، لیف و ماتریس = $\varepsilon_m, \varepsilon_f, \varepsilon_c$

مدول طولی الیاف، ماتریس و کامپوزیت = E_c, E_m, E_f



شکل ۳: المان حجمی کامپوزیت تحت تأثیر یک نیروی طولی

با جایگذاری روابط (۳-۲۲) و (۳-۲۳) در رابطه (۳-۲۱) خواهیم داشت:

$$E_1 \varepsilon_c A_c = E_f \varepsilon_f A_f + E_m \varepsilon_m A_m \quad (3-24)$$

کرنش در کامپوزیت، لیف و ماتریس برابر است:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_f = \varepsilon_c \quad (3-25)$$

بنابراین مدول طولی به صورت زیر به دست می آید:

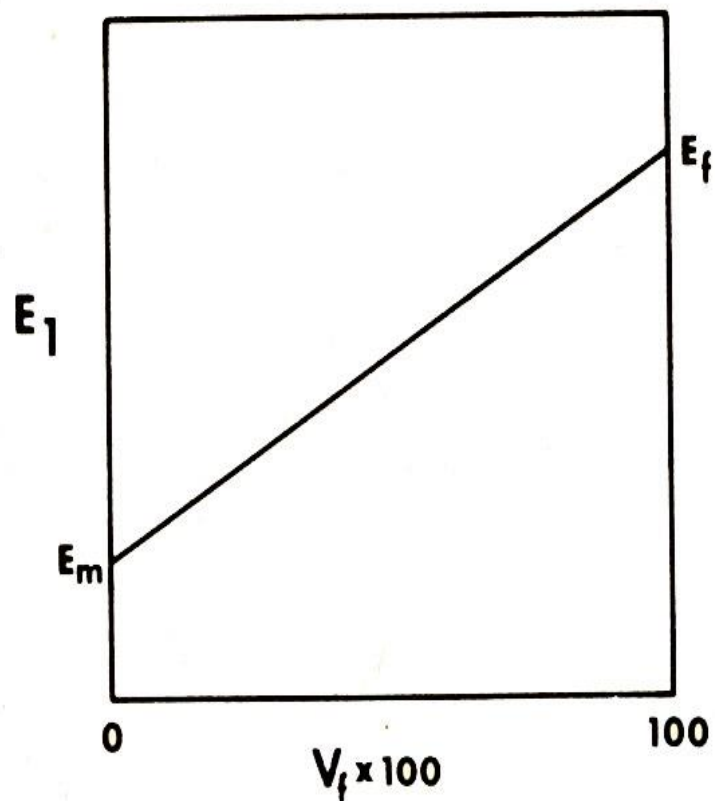
$$E_1 = E_f \nu_f + E_m \nu_m \quad (3-26)$$

قانون اختلاط

این معادله قانون اختلاط نامیده می شود که به طور شماتیک در شکل ۴ رسم شده است.



همچنین با استفاده از معادلات فوق می توان اثبات کرد:



$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{E_f}{E_1} v_f \quad (3-27)$$

✓ این معادله نشان می دهد که سهم لیف در تحمل نیرو نسبت به کامپوزیت چقدر است.

شکل ۴: تغییرات E_1 در مقابل کسر حجمی لیف

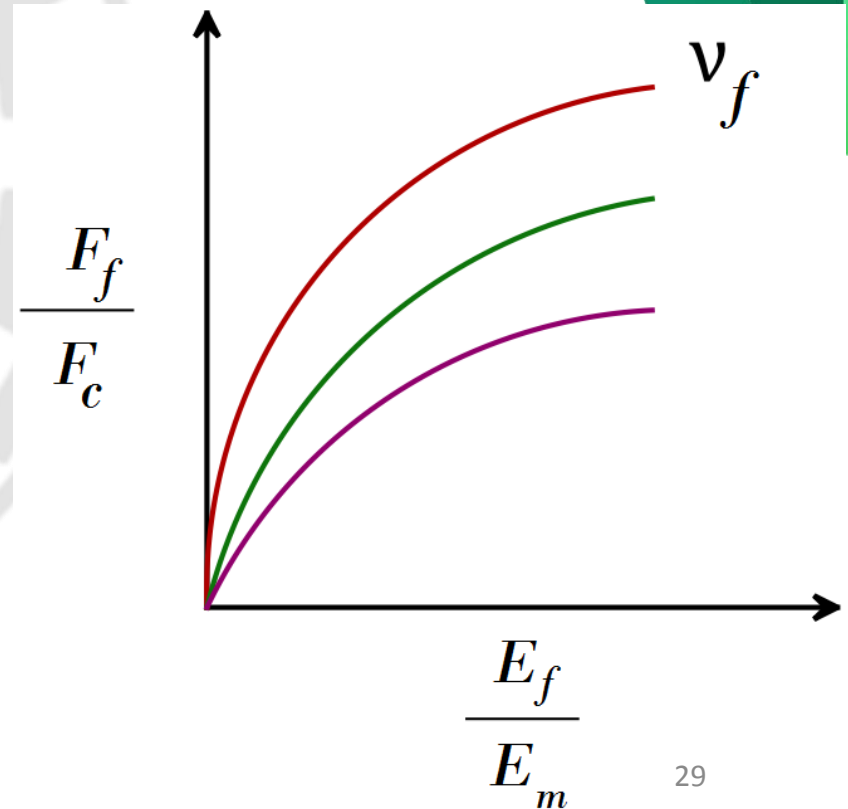


$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \varepsilon_f A_f}{E_m \varepsilon_m A_m} \xrightarrow[\div A_c]{\text{صورت و مخرج}} \frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \frac{A_f}{A_c}}{E_m \frac{A_m}{A_c}} \rightarrow \boxed{\frac{F_f}{F_m} = \frac{E_f \nu_f}{E_m \nu_m}}$$

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{E_f \varepsilon_f A_f}{E_1 \varepsilon_c A_c} \xrightarrow[\div A_c]{\text{صورت و مخرج}} \frac{F_f}{F_c} = \frac{E_f}{E_1} \times \nu_f \rightarrow \frac{F_f}{F_c} = \frac{E_f}{E_f \nu_f + E_m \nu_m} \times \nu_f \rightarrow$$

$$\frac{F_f}{F_c} = \frac{\nu_f \frac{E_f}{E_m}}{\nu_f \left(\left(\frac{E_f}{E_m} \right) + \left(\frac{\nu_m}{\nu_f} \right) \right)} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{F_f}{F_c} = \frac{\frac{E_f}{E_m}}{\frac{E_f}{E_m} + \frac{\nu_m}{\nu_f}}}$$





مثال:

الف) دو کامپوزیت از الیاف شیشه و رزین اپوکسی ساخته شده است. اولی ۱۰٪ حجمی الیاف شیشه دارد و دومی ۵۰٪ الیاف شیشه دارد. مطلوب است محاسبه درصد نیروی اعمال شده به الیاف برای این دو کامپوزیت؟

مدول الیاف شیشه : 72 GPa

$$\frac{E_f}{E_m} = 20$$

$$E_{\text{کربن}} = 432 \text{ GPa}$$

ب) اگر به جای الیاف شیشه از الیاف کربن استفاده شود؟



مسئله:

مطلوب است تعیین مدول طولی یک تک لایه اپوکسی / شیشه با کسر حجمی ۷۰٪ الیاف. همچنین نیروی تحمل شده توسط الیاف را در کامپوزیت محاسبه کنید.

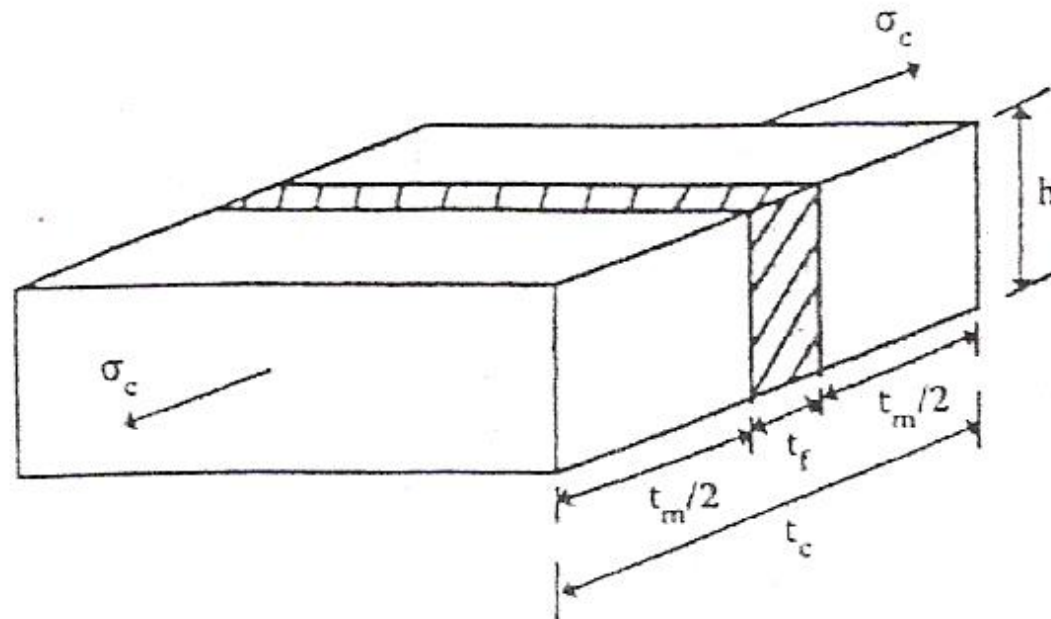


یک المان حجمی از کامپوزیت مانند شکل ۵ در نظر بگیرید که در معرض تنش قرار گرفته است. کامپوزیت، ماتریس و الیاف دارای تنش یکسان می باشند:

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_c \quad (3-28)$$

اما ازدیاد طول کامپوزیت مجموع ازدیاد طولهای وارده به لیف و ماتریس است:

$$\Delta_c = \Delta_f + \Delta_m \quad (3-29)$$



شکل ۵: المان حجمی کامپوزیت تحت تأثیر یک نیروی عرضی



$$\Delta_c = t_c \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_2}$$

$$\Delta_f = t_f \varepsilon_f$$

(۳-۳۰)

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f}$$

(۳-۳۱)

$$\Delta_m = t_m \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m}$$

با جایگذاری روابط (۳-۳۰) و (۳-۳۱) در رابطه (۳-۲۹) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_f} \frac{t_f}{t_c} + \frac{1}{E_m} \frac{t_m}{t_c}$$

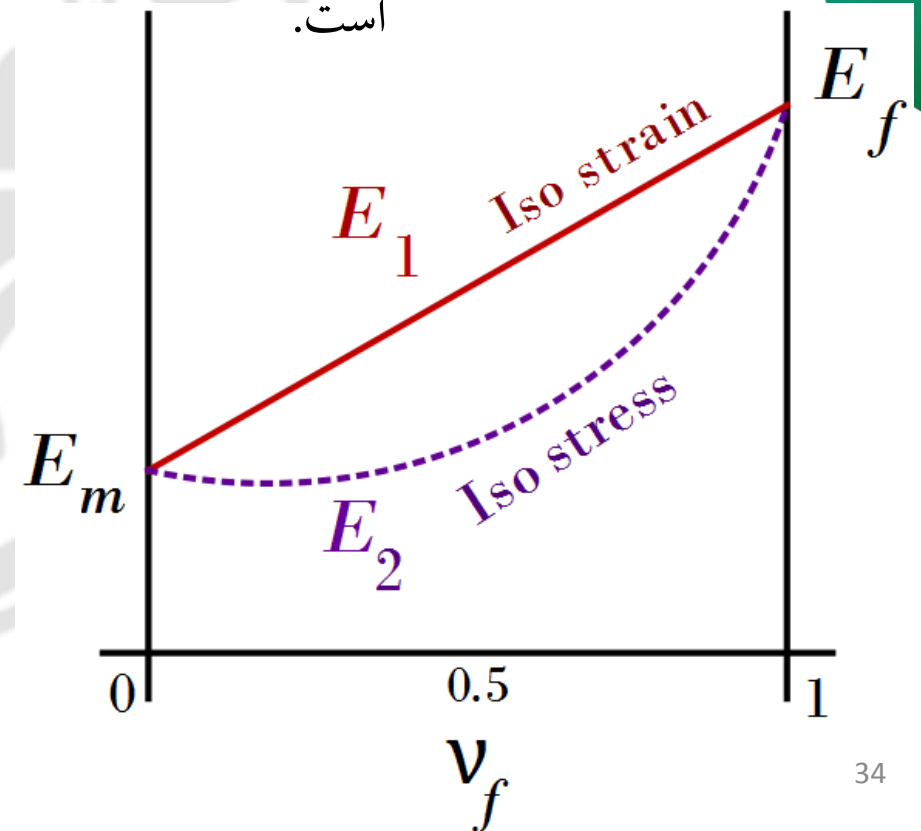
(۳-۳۲)

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_m}{E_m} \rightarrow E_2 = \frac{E_f E_m}{\nu_m E_f + \nu_f E_m} \quad (3-33)$$

معادله (۳-۳۳) می توان به صورت زیر نرمالیزه شود، این معادله در شکل ۶ رسم شده است.

$$\frac{E_2}{E_m} = \frac{1}{\nu_m + \nu_f (E_m / E_f)} \quad (3-34)$$

$$E_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\nu_i}{E_i} \right)}$$



جدول ۲-۳ مقادیر $\frac{E_2}{E_m}$ در کسر حجمی های مختلف برای سه مقدار $\frac{E_f}{E_m}$ را نشان می دهد.

جدول ۲-۳: مقادیر $\frac{E_2}{E_m}$ برای مقادیر مختلف کسر حجمی و $\frac{E_f}{E_m}$

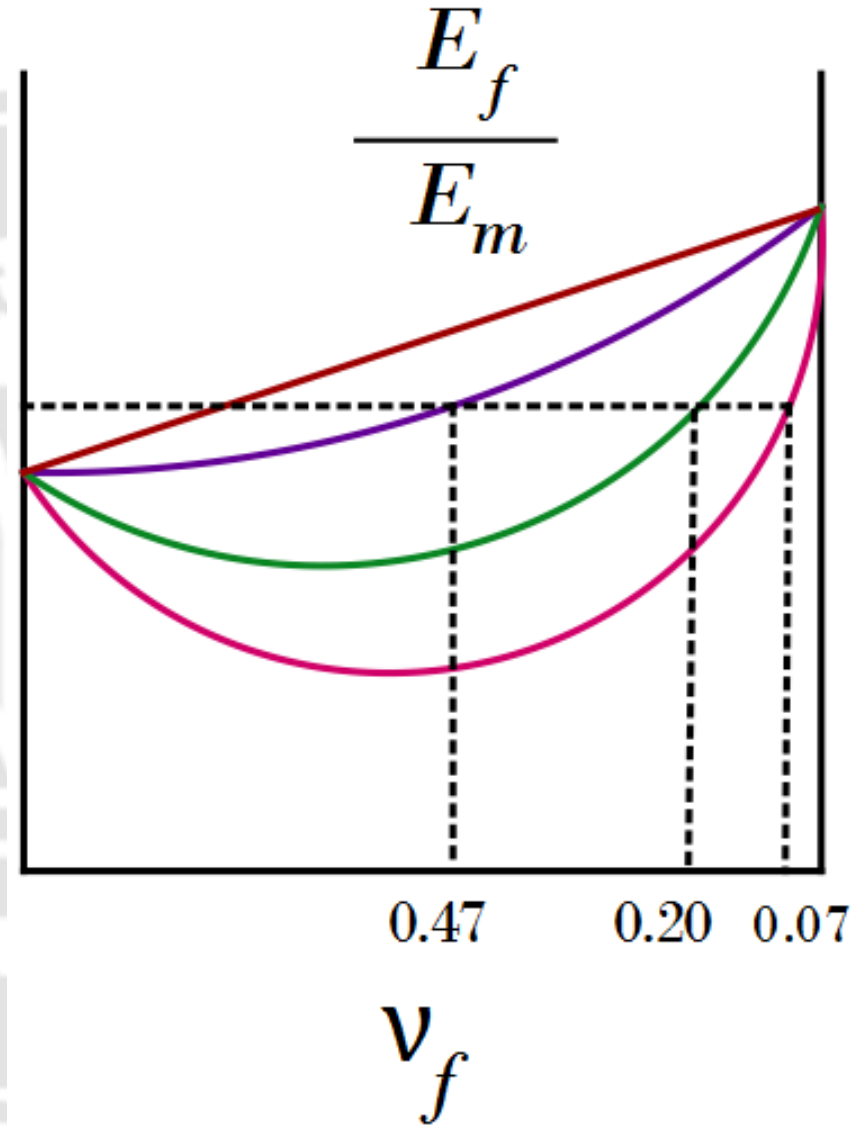
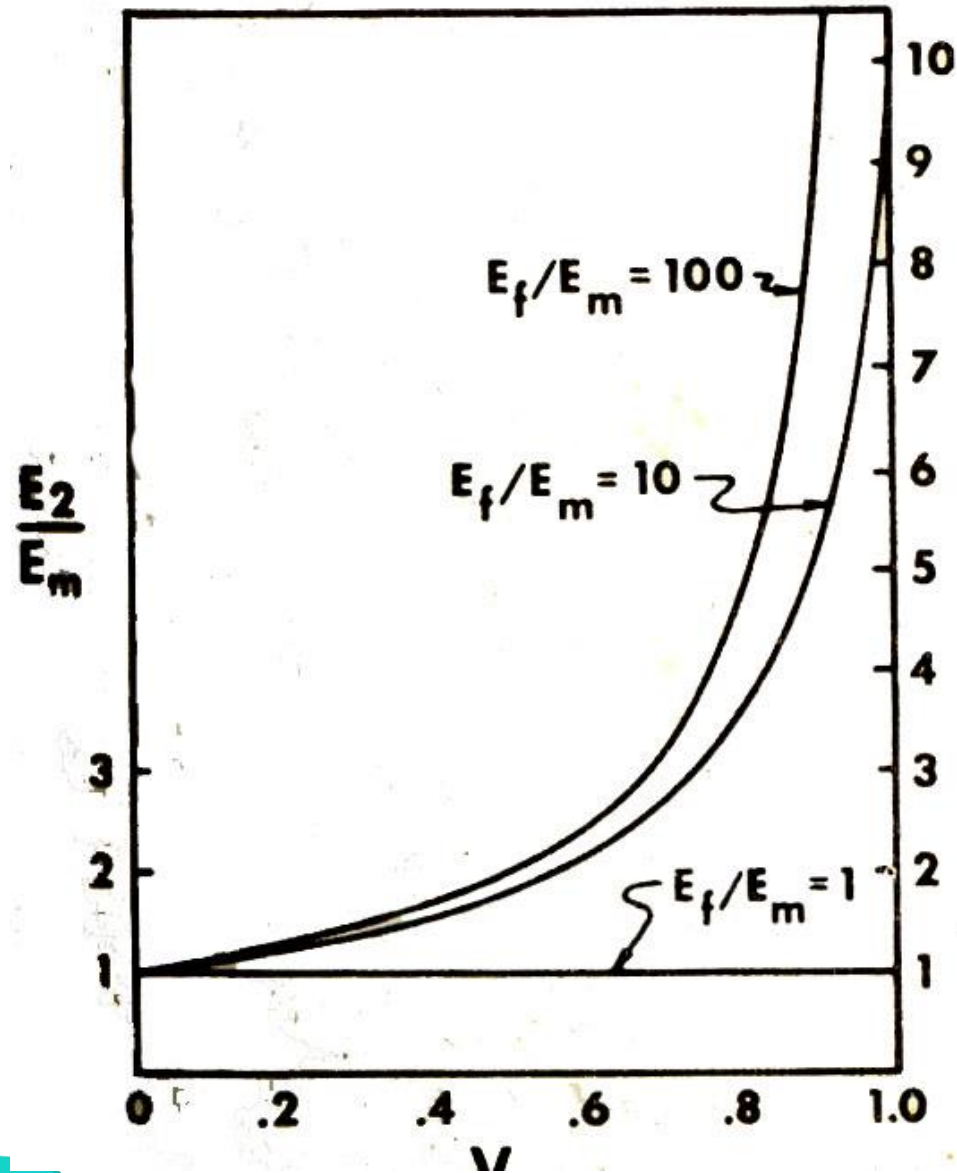
$\frac{E_m}{E_f}$	V_f								
	0	.2	.4	.5	.6	.8	.9	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1/10	1	1.22	1.56	1.82	2.17	3.57	5.26	10	
1/100	1	1.25	1.66	1.98	2.46	4.80	9.17	100	

یکی از مهم ترین پارامترها در کامپوزیت ها نسبت مدول لیف به مدول ماتریس است:

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_m} = \frac{E_f \varepsilon_f^*}{E_m \varepsilon_m} = \frac{E_f}{E_m}$$

* در مدول الاستیک الاستیک طولی : $\varepsilon_m = \varepsilon_f$

هر چه پارامتر $\frac{E_f}{E_m}$ زیاد شود، به کسر حجمی کمتری از الیاف نیاز می شود.



شکل ۶: تغییرات E_2 در مقابل کسر حجمی



مثال:

مطلوب است محاسبه مدول عرضی کامپوزیت یک لایه اپوکسی/شیشه با ۷۰٪ حجمی الیاف شیشه؟
(برای به دست آوردن اطلاعات مورد نیاز از جداول قبلی استفاده نمایید)



مطلوب است مقایسه سفتی طولی و عرضی دو کامپوزیت که دارای ماتریس یکسان اما الیاف متفاوت هستند. (کسر حجمی الیاف را ۵۰٪ در نظر بگیرید.)

- برای حالت اول : $\frac{E_f}{E_m} = 50$
- برای حالت دوم : $\frac{E_f}{E_m} = 25$

مثال:

یک ماده ای در حالت تنش کششی مورد استفاده قرار می گیرد. این ماده از آلیاژ آلومینیوم ساخته شده است. اگر بخواهیم آن را با کامپوزیت گرافیت / اپوکسی جایگزین کنیم:

(۱) کسر حجمی الیاف گرافیت مورد نیاز تا بتوان به همان مدول برسیم، چقدر است؟

(۲) چند درصد از وزن کاهش می یابد؟

$$E_{\text{آلومینیوم}} = 70 \text{ GPa}, E_{\text{اپوکسی}} = 3.5 \text{ GPa}, E_{\text{گرافیت}} = 390 \text{ GPa}$$

$$\rho_{\text{آلومینیوم}} = 2.7 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{اپوکسی}} = 1.2 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{گرافیت}} = 1.9 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

نسبت پوآسون اصلی به صورت منفی نسبت کرنش عمود عرضی به کرنش عمود طولی وقتی که تنش اعمال شده در جهت طولی باشد، تعریف می شود. یک المان حجمی از کامپوزیت مشابه المان در نظر گرفته شده برای تعیین مدول طولی مطابق شکل ۷ در نظر گرفته می شود. طبق تعریف تغییر شکل عرضی کامپوزیت برابر مجموع تغییر شکلهای عرضی اعمال شده به لیف و ماتریس است.

$$\delta_c^T = \delta_f^T + \delta_m^T \quad (3-35)$$

طبق تعریف تغییر شکل های عرضی به صورت زیر تعریف می شود:

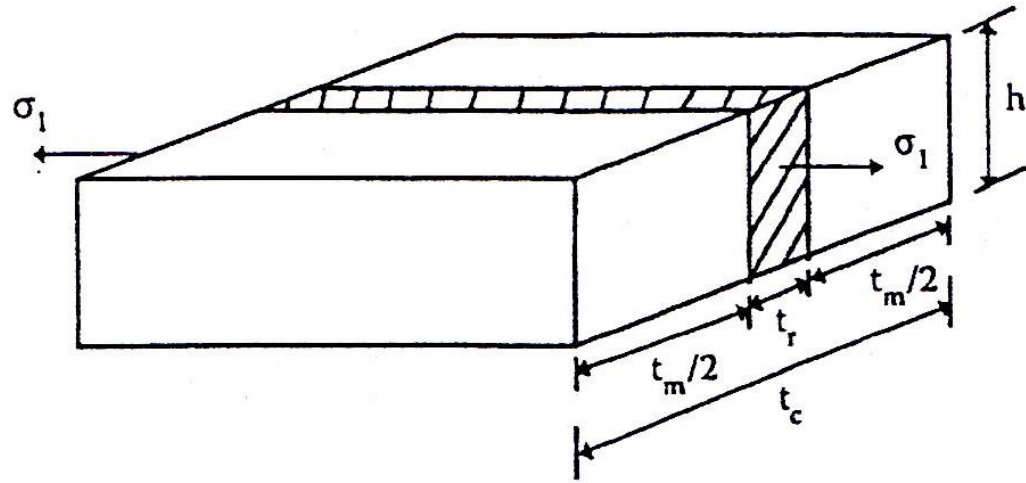
$$\varepsilon_c^T = \frac{\delta_c^T}{t_c}$$

$$\varepsilon_f^T = \frac{\delta_f^T}{t_f} \quad (3-36)$$

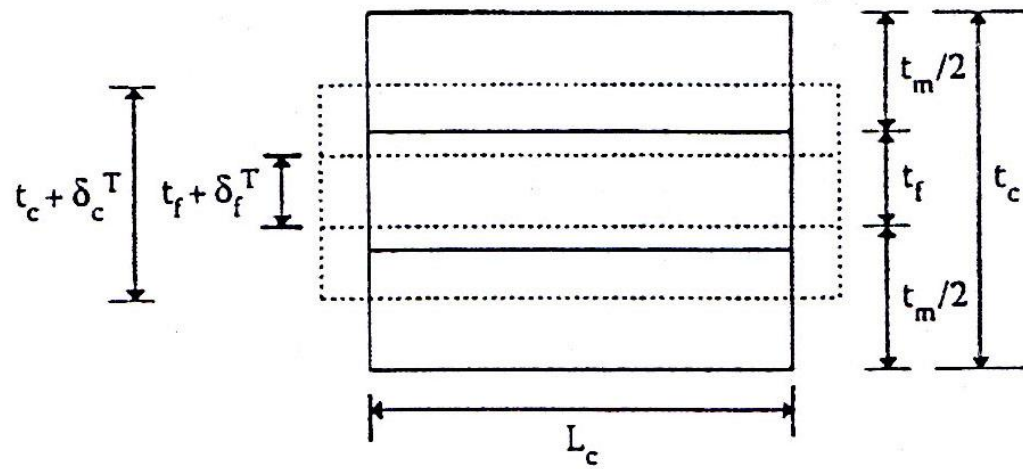
$$\varepsilon_m^T = \frac{\delta_m^T}{t_m}$$

• تغییر شکل عرضی ماتریس، لیف و کامپوزیت = $\delta_c^T, \delta_f^T, \delta_m^T$

• کرنش عرضی ماتریس، لیف و کامپوزیت = $\varepsilon_c^T, \varepsilon_f^T, \varepsilon_m^T$



(a)



(b)

شکل ۷: المان حجمی کامپوزیت برای تعیین نسبت پوآسون اصلی



$$\varepsilon_c^T t_c = \varepsilon_f^T t_f + \varepsilon_m^T t_m \quad (۳-۳۷)$$

تعریف نسبت پوآسون برای لیف، ماتریس و کامپوزیت به صورت زیر است:

$$V_{12} = -\frac{\varepsilon_c^T}{\varepsilon_c^L}$$

$$V_f = -\frac{\varepsilon_f^T}{\varepsilon_f^L} \quad (۳-۳۸)$$

$$V_m = -\frac{\varepsilon_m^T}{\varepsilon_m^L}$$



نسبت پوآسون ماتریس، لیف و کامپوزیت V_c, V_f, V_m =

کرنش طولی ماتریس، لیف و کامپوزیت $\epsilon_c^L, \epsilon_f^L, \epsilon_m^L$ =

با جایگذاری کرنش های عرضی از رابطه (۳-۳۷) در رابطه (۳-۳۶) داریم:

$$-\epsilon_c^L t_c V_{12} = -\epsilon_f^L t_f V_f - \epsilon_m^L t_m V_m \quad (۳-۳۹)$$

با در نظر گرفتن اینکه کرنش طولی در لیف، ماتریس و کامپوزیت یکسان است خواهیم داشت:

$$t_c V_{12} = t_f V_f + t_m V_m \quad (۳-۴۰)$$

$$V_{12} = V_f \frac{t_f}{t_c} + V_m \frac{t_m}{t_c} \quad (۳-۴۱)$$

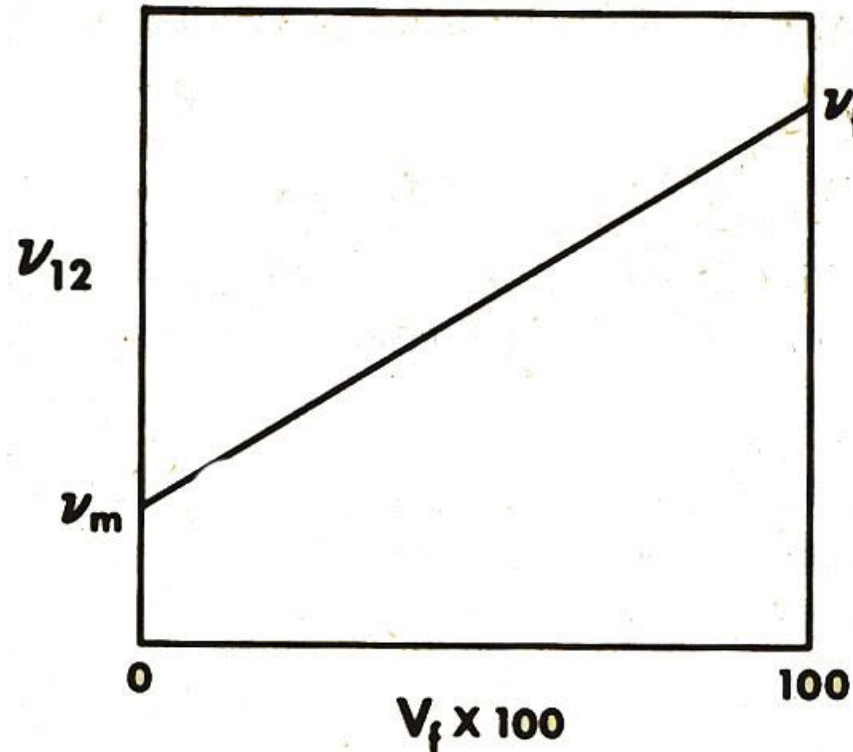
چون طول یکسان است می توان $\frac{t_m}{t_c}$ و $\frac{t_f}{t_c}$ را به عنوان کسر حجمی در نظر

گرفت و معادله نهایی نسبت پوآسون اصلی به صورت زیر به دست می آید:

$$v_{12} = V_f v_f + V_m v_m$$

قانون اختلاط

(۳-۴۲)



▪ V_m و V_f به ترتیب کسر حجمی لیف و ماتریس هستند که به علت تمایز با نسبت پوآسون با حروف بزرگ آورده شده اند. معادله (۳-۴۲) در شکل ۸ رسم شده است.

شکل ۸: تغییرات v_{12} در مقابل کسر حجمی الیاف



مسئله:

نسبت پواسون اصلی یک تک لایه اپوکسی / شیشه با ۷۰٪ حجمی الیاف شیشه را با استفاده از جدول ها محاسبه کنید.





$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (3-43) \quad \text{در جهت } z \quad \Delta W = \Delta W_f + \Delta W_m \quad (3-44)$$

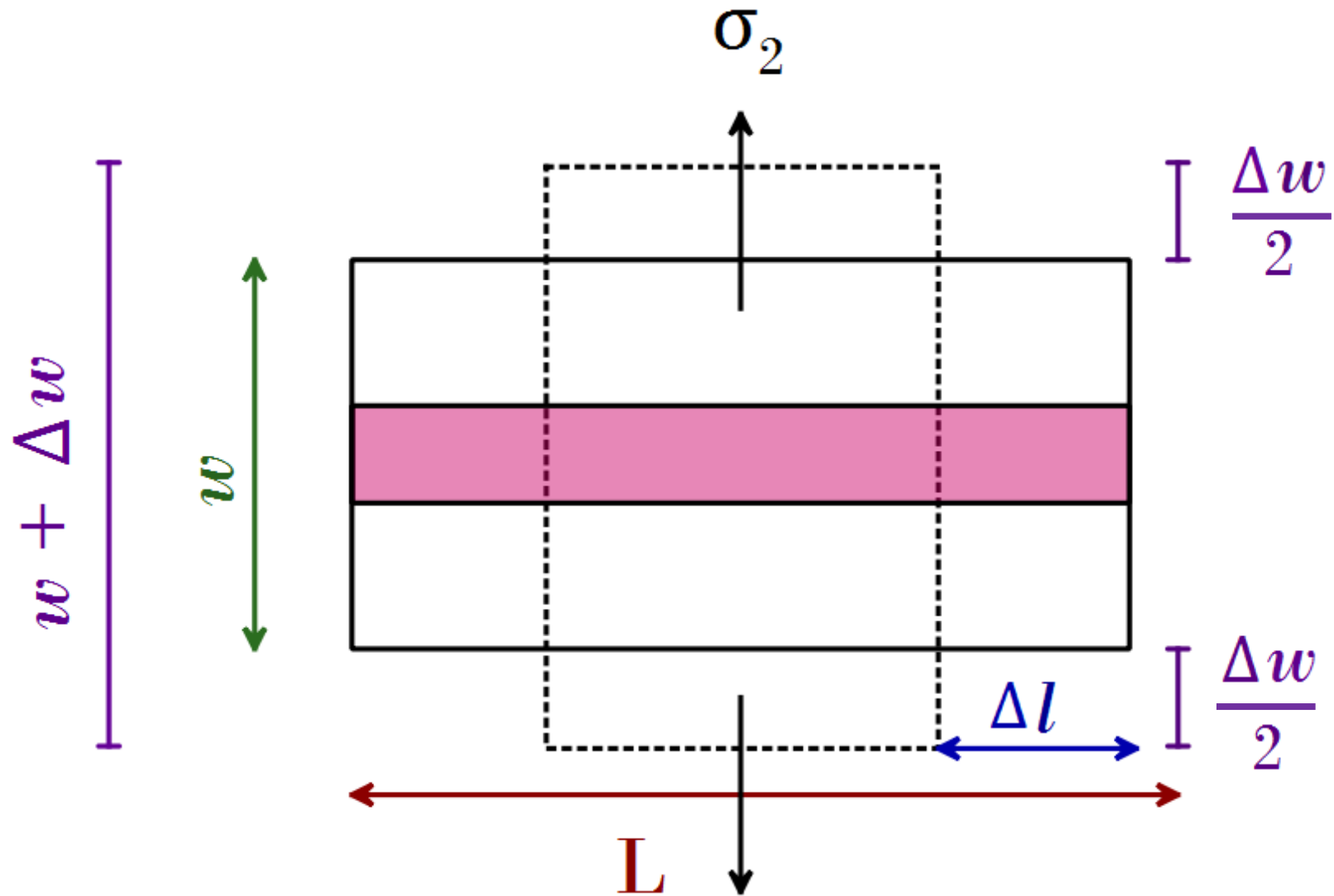
$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta W}{W} \quad \varepsilon_f = \frac{\Delta W_f}{\nu_f W} \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta W_m}{\nu_m W} \quad (3-45)$$

سهم لیف و ماتریس در مخرج کسر با کسر حجمی آن ها مشخص می شود.

$$\varepsilon_2 W = \nu_f W \varepsilon_f + \nu_m W \varepsilon_m \quad (3-46) \quad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\text{کرنش عرضی} \quad \varepsilon_2 = \nu_f \varepsilon_f + \nu_m \varepsilon_m \quad \nu_f = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_f} \quad (3-47)$$

$$\nu_m = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_m}$$





$$-\frac{\varepsilon_1}{\nu_{21}} = \nu_f \left(-\frac{\varepsilon_1}{\nu_f} \right) + \nu_m \left(-\frac{\varepsilon_1}{\nu_m} \right) \quad -\frac{1}{\nu_{21}} = \frac{\nu_f}{\nu_f} + \frac{\nu_m}{\nu_m}$$

$$\nu_{21} = \frac{\nu_f \nu_m}{\nu_f \nu_m + \nu_m \nu_f}$$

(۳-۴۸)

• اگر یک ماده ایزوتروپ داشته باشیم:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (۳-۴۹) \quad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

(۳-۵۰)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2}$$

(۳-۵۱)

حالت خاص ماده :
برای اورتوتروپ ها
صادق است.

اثبات این رابطه در
بخش ماکرومکانیک

❖ تعیین مدول برشی صفحه ای (G_{12})

یک تنش برشی (G_{12}) بر روی المان حجمی نشان داده شده در شکل ۱۰ وارد می شود. تغییر شکل برشی ایجاد شده در کامپوزیت برابر مجموع تغییر شکل‌های برشی در الیاف و ماتریس است.

$$\delta_c = \delta_f + \delta_m \quad (3-52)$$

• تغییر شکل برشی ماتریس، لیف و کامپوزیت = $\delta_c, \delta_f, \delta_m$
طبق تعریف:

$$\delta_c = t_c \gamma_c$$

$$\delta_f = t_f \gamma_f \quad (3-53)$$

$$\delta_m = t_m \gamma_m$$

• کرنش برشی ماتریس، لیف و کامپوزیت = $\gamma_c, \gamma_f, \gamma_m$

• ضخامت ماتریس، لیف و کامپوزیت = t_c, t_f, t_m

مدول برشی ماتریس، لیف و کامپوزیت $G_{12}, G_f, G_m =$

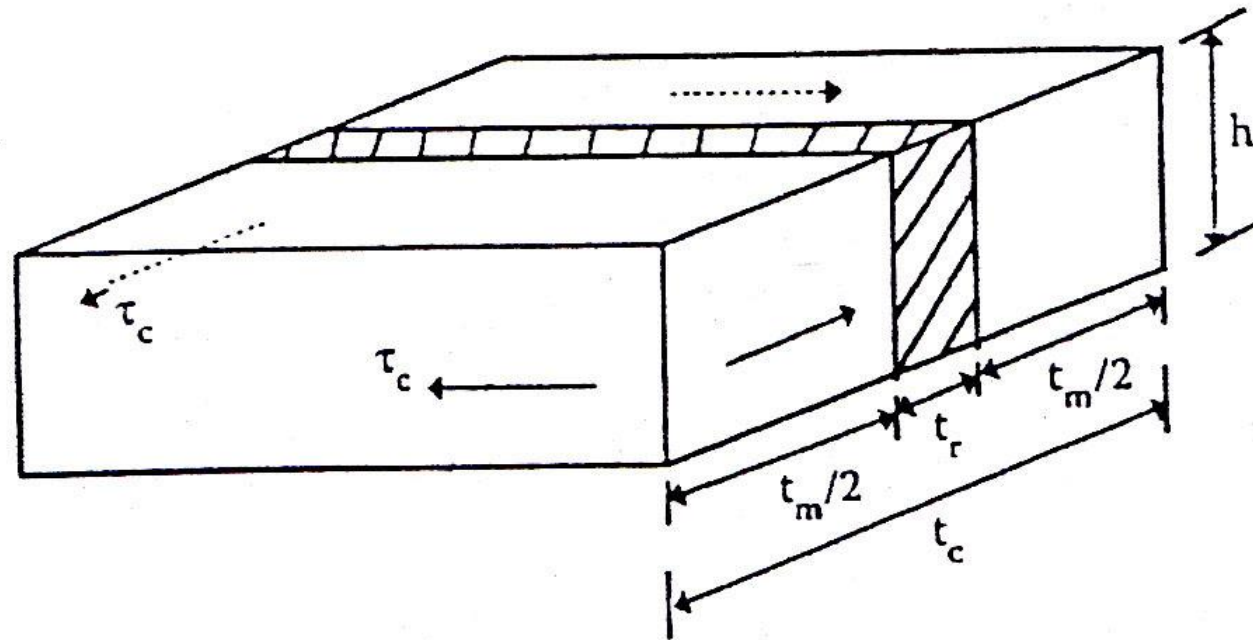
طبق قانون هوک، کرنش برشی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma_c = \frac{\tau_c}{G_{12}}$$

$$\gamma_f = \frac{\tau_f}{G_f}$$

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G_m}$$

(۳-۵۴)



شکل ۱۰: المان حجمی کامپوزیت برای تعیین مدول برشی

با جایگذاری روابط (۳-۵۳) و (۳-۵۴) در رابطه (۳-۵۲) خواهیم داشت:

$$\frac{\tau_c}{G_{12}} t_c = \frac{\tau_f}{G_f} t_f + \frac{\tau_m}{G_m} t_m \quad (3-55)$$

از آنجا که تنش برشی در لیف، ماتریس و کامپوزیت برابر است ($\tau_c = \tau_f = \tau_m$)،

معادله بالا به صورت زیر ساده می شود:

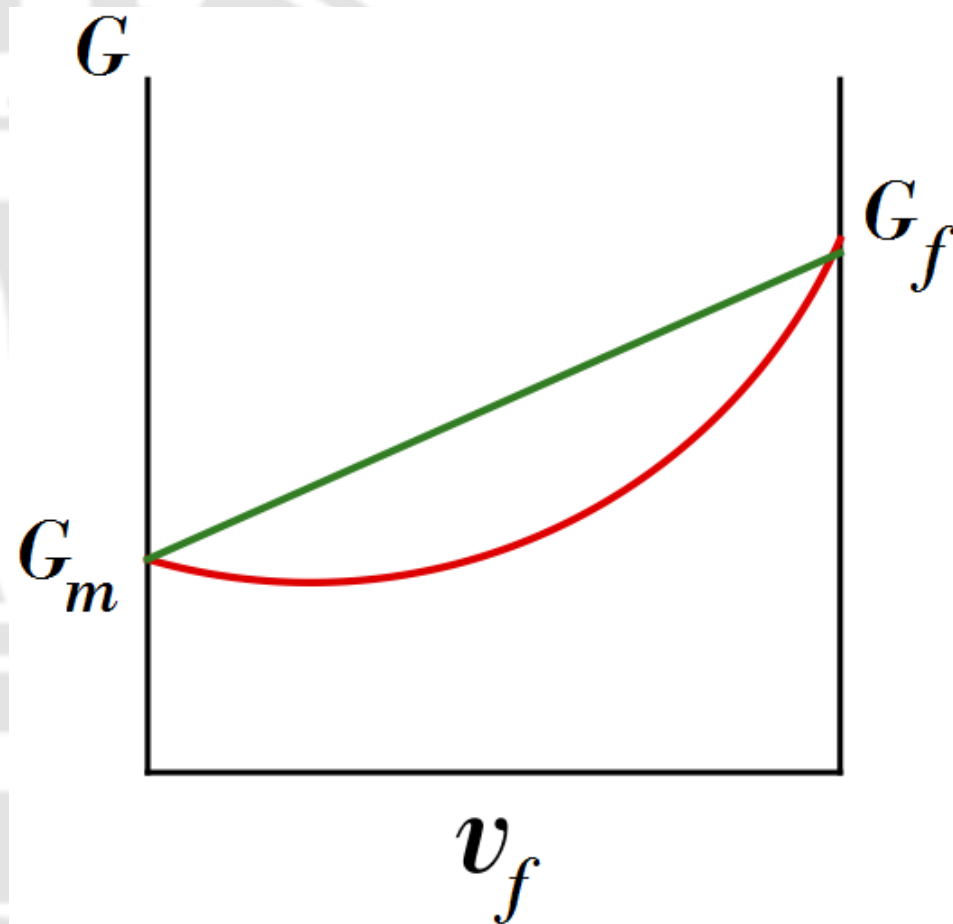
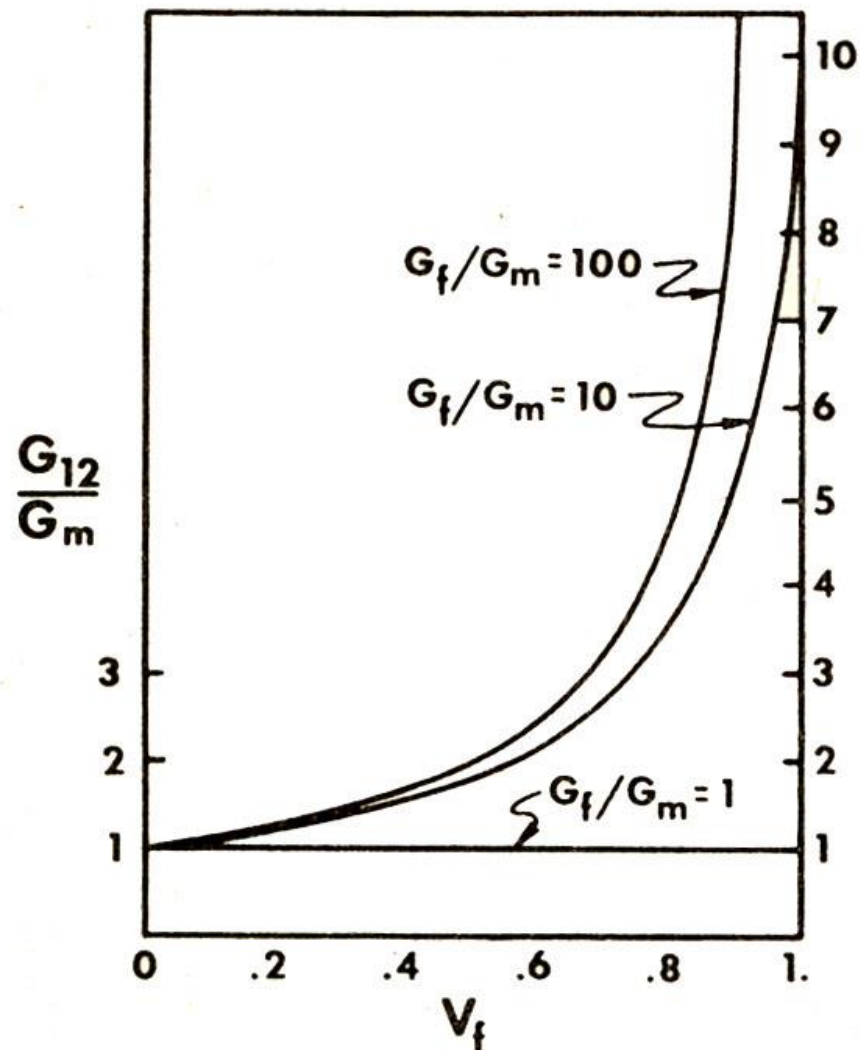
$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_f} \frac{t_f}{t_c} + \frac{1}{G_m} \frac{t_m}{t_c} \quad (3-56)$$

و معادله مدول برشی کامپوزیت به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m} \quad (3-57)$$

این معادله در شکل ۱۱ رسم شده است.

$$G_{21} = v_f G_f + v_m G_m \quad (3-58)$$



شکل ۱۱: تغییرات G_{12} در مقابل کسر حجمی الیاف



مثال:

تعیین مدول برشی یک تک لایه اپوکسی / شیشه ۷۰٪ حجمی الیاف؟



مثال:

یک کامپوزیت دارای ۴۰٪ حجمی الیاف پیوسته تک جهته شیشه در ماتریس پلی استر می باشد. اگر یک تنش کششی 100 MPa موازی با الیاف به این کامپوزیت اعمال شود، مطلوب است محاسبه کرنش های حاصل از این اعمال نیرو؟

$$E_f = 76 \text{ GPa} \quad , \quad E_m = 3 \text{ GPa}$$
$$\nu_f = 0.22 \quad , \quad \nu_m = 0.38$$



مثال:

یک تنش کششی $15MPa$ به یک کامپوزیت ۴۰٪ حجمی الیاف شیشه/پلی استر تک جهت عمود بر الیاف اعمال می شود. مطلوب است محاسبه کرنش ایجاد شده در محور موازی با الیاف؟





➤ مدل های نیمه تجربی برای به دست آوردن ثابت های سفتی:

از آنجا که نتایج به دست آمده از روش مقاومت مصالح برای تعیین مدول عرضی و مدول برشی با نتایج تجربی توافق خوبی ندارند، برای به دست آوردن نتایج دقیق تر باید از روش های دقیق تری محاسبات عددی، روش های الاستیسیته و... استفاده کرد که متأسفانه این روش ها تنها با کاربرد معادلات پیچیده و یا به صورت نموداری استفاده می شوند. بنابراین از روش های نیمه تجربی که برای اکثر اهداف طراحی مناسب می باشند استفاده می شود. یکی از این روش های نیمه تجربی روش "Halpin Tsai" می باشد که به آن پرداخته می شود:

■ تعیین مدول طولی به روش Halpin Tsai

مدول طولی روش هالپین - تسای مشابه روش مقاومت مصالح است.

$$E_1 = E_f \nu_f + E_m \nu_m$$

(۳-۵۹)

مدول عرضی در روش نیمه تجربی از معادلات زیر به دست می آید:

$$\frac{E_2}{E_m} = \frac{1 + \zeta \eta \nu_f}{1 - \eta \nu_f} \quad (3-60)$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) + \zeta} \quad (3-61)$$

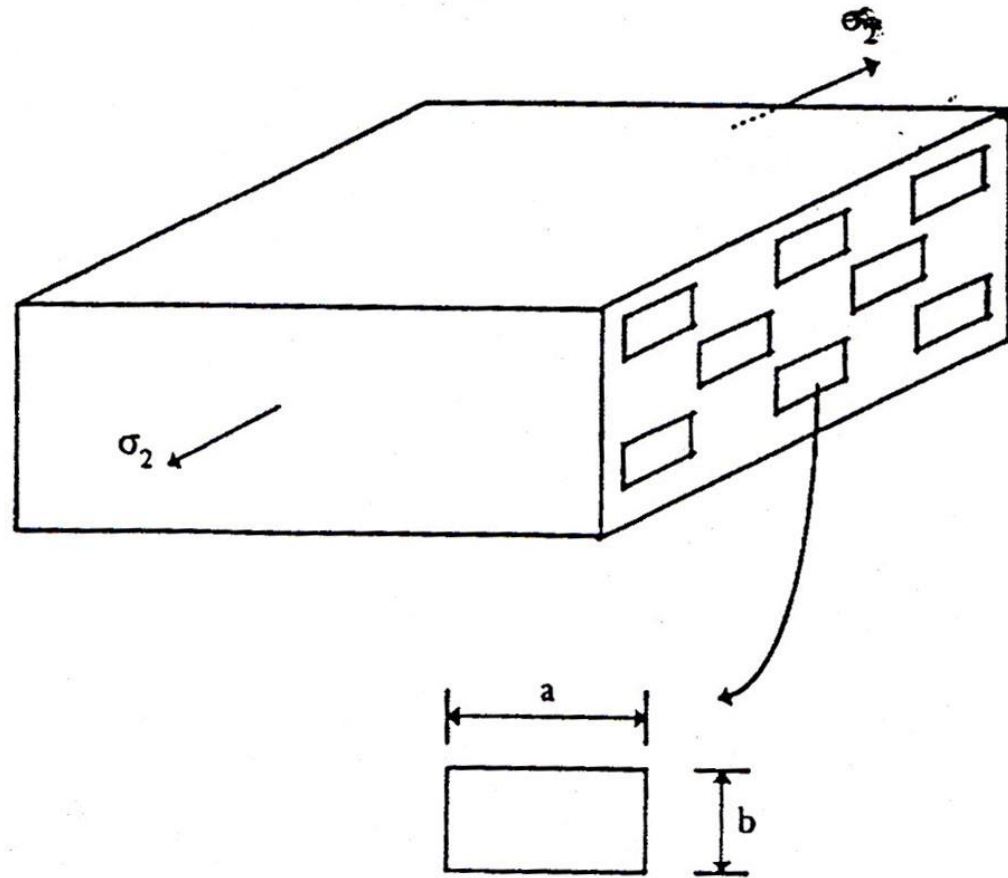
ζ : فاکتور تقویت نام دارد و وابسته به شکل هندسی الیاف، طرز قرار گرفتن الیاف و شرایط بارگذاری است.

هالپین - تسای با مقایسه معادلات (3-60) و (3-61) با روش الاستیسیته مقدار ζ را به صورت زیر تعیین کردند:

برای الیاف دایره ای در آرایش مربعی: $\zeta = 2$

برای الیاف مستطیل در آرایش شش ضلعی: $\zeta = 2 \frac{a}{b}$

که a طول سطح مقطع لیف و b عرض آن است، به طوریکه b عمود بر جهت اعمال بار قرار گرفته است.





مثال:

مطلوب است محاسبه مدول عرضی کامپوزیت تک لایه اپوکسی / شیشه با ۷۰٪ حجمی الیاف شیشه با استفاده از جداول ۱-۳ برای الیاف دایره ای در آرایش مربعی شکل؟

- روش مقاومت مصالح کمتر از مقدار واقعی نشان می دهد.
- روش مقاومت مصالح Iso stress را به صورت max و Iso strain را به صورت min نشان می دهد.

نسبت پوآسون اصلی روش هالپین - تسای مشابه روش مقاومت مصالح است.

$$V_{12} = V_f v_f + V_m v_m \quad (3-62)$$

که در اینجا نیز V_f و V_m به ترتیب کسر حجمی لیف و ماتریس هستند که به علت تمایز با نسبت پوآسون با حروف بزرگ آورده شده اند.

تعیین مدول برشی صفحه ای به روش Halpin Tsai

هالپین-تسای برای مدول برشی معادله ای شبیه به مدول عرضی ارائه کرده اند:

$$\frac{G_2}{G_m} = \frac{1 + \zeta \eta v_f}{1 - \eta v_f} \quad (3-63)$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{G_f}{G_m}\right) - 1}{\left(\frac{G_f}{G_m}\right) + \zeta} \quad (3-64)$$



مقدار ζ فاکتور تقویت کنندگی وابسته به شکل هندسی الیاف و آرایش و شرایط بارگذاری می باشد.

برای الیاف دایره ای در آرایش مربعی: $\zeta = 1$

برای الیاف مستطیل در آرایش شش ضلعی: $\zeta = \sqrt{3} \ln \frac{a}{b}$

که a طول سطح مقطع لیف و b عرض آن است، به طوریکه b عمود بر جهت اعمال بار قرار گرفته است.

استفاده از $\zeta = 1$ برای الیاف دایره ای در آرایش مربعی با کسر حجمی ۰/۵ نتایج معقولی می دهد، اما

برای سیستم اپوکسی / شیشه با کسر حجمی ۰/۷۵، ۳۰ درصد خطا دارد. دانشمندان دیگر (Malberbe &

Hemitt) برای دقت بیشتر ζ را به صورت زیر تعریف کرده اند:

$$\zeta = 1 + 40v_f^{10}$$

(۳-۶۵)

$$30 < v_f < 75$$



مثال:

با استفاده از معادله Halpin Tsai مطلوب است محاسبه مدول برشی تک لایه اپوکسی / شیشه با کسر حجمی الیاف ۷۰٪؟ فرض کنید الیاف دایره ای شکل در آرایش مربعی باشند. همچنین فاکتور تقویت کنندگی را با استفاده از معادله ی Malberbe & Hemitt به دست آورید.



روش جداسازی تنش ها Stress Partioning

(۱) در این روش تنش در لیف و ماتریس برابر نیستند.

(۲) متوسط تنش در ماتریس کسری از متوسط تنش در الیاف است.

$$\sigma_m = \eta_2 \sigma_f$$

$$0 < \eta_2 < 1$$

$$\sigma_2 = \nu_f \sigma_f + \nu_m \sigma_m \quad \longrightarrow \quad \nu_f \sigma_f + \nu_m \eta_2 \sigma_f = (\nu_f + \nu_m \eta_2) \sigma_f$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_2}{\nu_f + \nu_m \eta_2}$$

(۳-۶۶)

با فرض الاستیک

بودن الیاف

گرنش عرضی

$$\varepsilon_2 = \nu_f \varepsilon_f + \nu_m \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\nu_f}{E_f} \sigma_f + \frac{\nu_m}{E_m} \sigma_m$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_m \eta_2}{E_m} \right) \sigma_f$$

(۳-۶۷)



$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\nu_f}{E_f} + \frac{\nu_m \eta_2}{E_m} \right) \frac{\sigma_2}{\nu_f + \nu_m \eta_2} \xrightarrow[\text{ضرب می نمایم:}]{\frac{1}{\sigma_2} \text{ طرفین را در}} \frac{1}{E_2} = \frac{\left(\frac{\nu_f}{E_f} \right) + \frac{\nu_m \eta_2}{E_m}}{\nu_f + \nu_m \eta_2}$$

$$\eta_{12} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_m}{G_f} \right)$$

برای
 G_{12}

$$\eta_k = \frac{1}{2(1 - \nu_m)} \left(1 + \frac{G_m}{K_{f_2}} \right)$$

برای
 K_2

$$\eta_{23} = \frac{1}{4(1 - \nu_m)} \left(3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_{f_2}} \right)$$

برای
 G_{23}



حالت های خاص نیز برای پارامترهای صفحه قبل وجود دارد:

if $G_f \gg \gg G_m$ $\xrightarrow[\text{نظر کردیم}]{\text{از } \frac{G_m}{G_f} \text{ صرف}}$

$$\eta_{12} = \frac{1}{2}$$

$$\eta_k = \frac{1}{2(1-\nu_m)} = 0.8$$

$$\eta_{23} = \frac{3-4\nu_m}{4(1-\nu_m)} = 0.6$$



$$E_1 = E_{f_1} v_f + E_m (1 - v_f)$$

$$E_{22} = E_{33} = \frac{E_m}{\left[1 - \sqrt{v_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f_2}} \right) \right]}$$

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_m}{\left[1 - \sqrt{v_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f_{12}}} \right) \right]}$$

$$G_{23} = \frac{G_m}{\left[1 - \sqrt{v_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f_{23}}} \right) \right]}$$

$$v_{12} = v_{13} = v_{f_{12}} v_f + v_m (1 - v_f)$$



روش تنش سه بعدی در یک ماتریس را تحلیل کرده است.

$$E_1 = E_f v_f + v_f E_m'$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m'}{v_f E_m' + v_m E_m (1 - v_m^2)}$$

$$E_m' = \frac{E_m}{1 - 2v_m^2}$$

$$E_2 = \frac{E_m' E_f}{E_f (1 - v_f) + v_m E_m'}$$

$$E_m' = \frac{E_m}{(1 - v_m^2)}$$

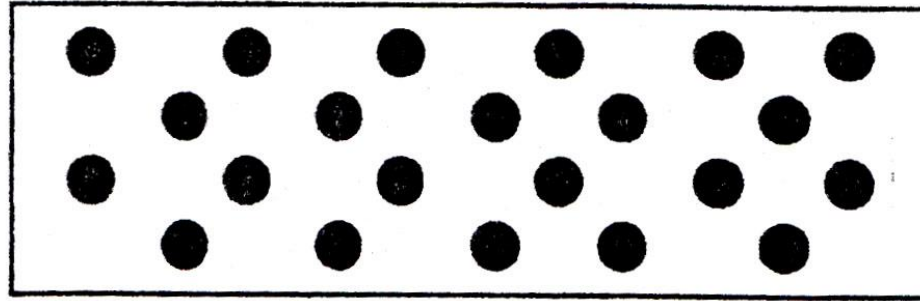
PEEK با ۳۰٪ حجمی الیاف کربن تک محور تقویت شده است. مطلوب است محاسبه مدول عرضی کامپوزیت با استفاده از ۳ روش مقاومت مصالح، Halpin Tsai و Brintrup؟

برای PEEK:

$E_m = 3.86 \text{ GPa}$ و $\nu_m = 0.36$ و برای الیاف کربن $E_m = 400 \text{ GPa}$ و الیاف را مدور و در آرایش مربعی فرض کنید.

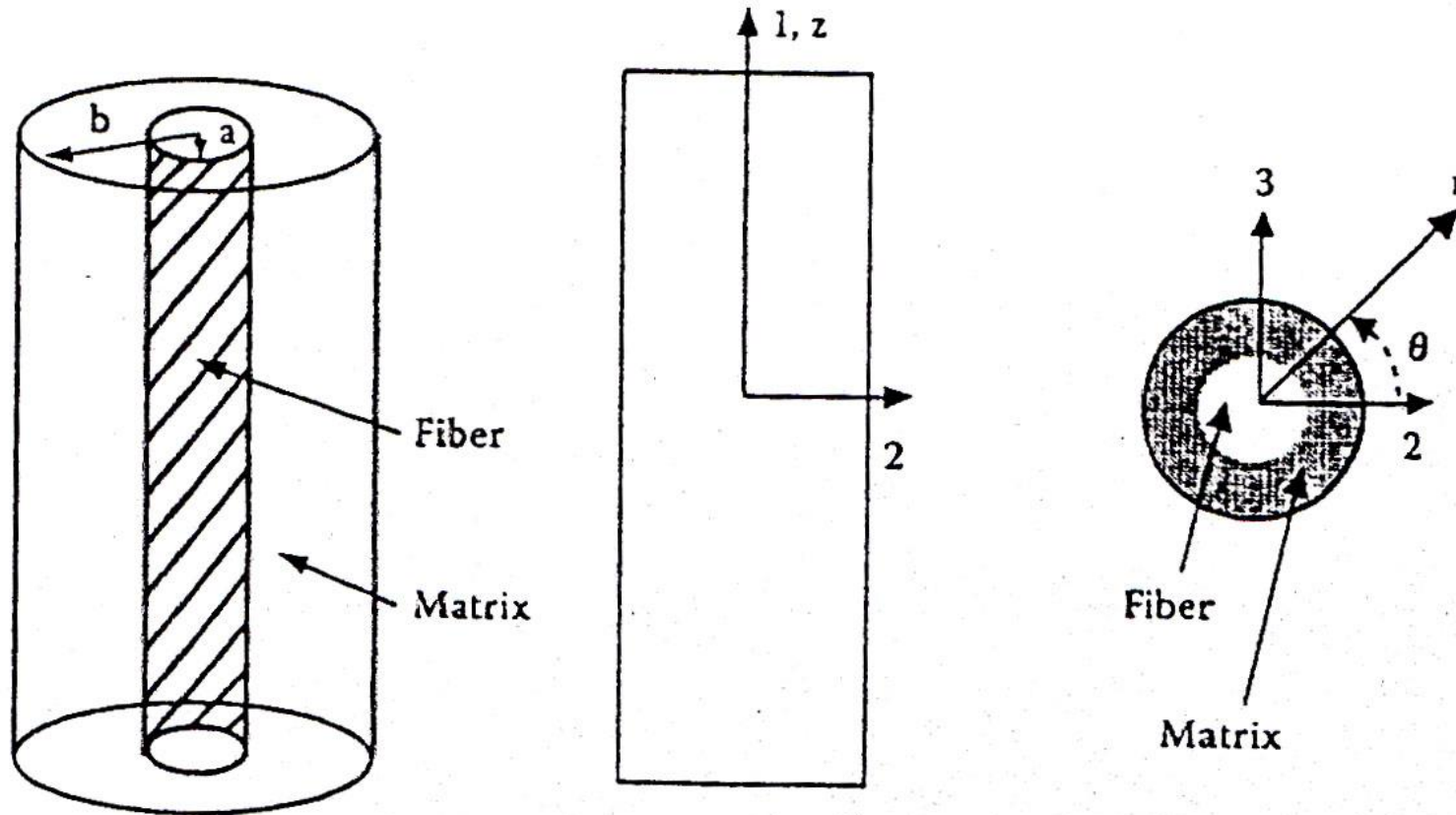
■ به دست آوردن ثابتهای سفتی با استفاده از مدل الاستیسیته:

علاوه بر روش مقاومت مصالح و روش های نیمه تجربی، روش الاستیسیته نیز برای تعیین ثابت های سفتی به کار می رود. مدل های الاستیسیته ارائه شده در این بحث موسوم به CCA می باشد. در مدل CCA فرض شده است که الیاف پیوسته، دارای سطح مقطع دایره ای و در فواصل منظم قرار گرفته اند، همان طور که در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲: آرایش پرئودیک الیاف در سطح مقطع تک لایه

کامپوزیت را می توان از تکرار المان نشان داده شده در شکل ۱۳ فرض نمود (RVE). المان کامپوزیت به صورت سیلندری است که دارای یک سیلندر الیاف سفت در درون که به سیلندر بیرونی توسط ماتریس پیوند خورده، است.



شکل ۱۳: مدل CCA به کار رفته برای پیش بینی مدول الاستیک
یک کامپوزیت تک جهت



شعاع لیف a و شعاع سیلندر بیرونی b در نظر گرفته می شود و کسر حجمی به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_f = \frac{a^2}{b^2}$$

شرایط مرزی مناسب به این المان اعمال می شود و ثابتهای الاستیک به دست می آیند که به علت طولانی بودن راه حل ها در اینجا فقط معادلات ذکر می شوند.

■ معادله مدول الاستیک طولی به روش الاستیسیته

$$E_1 = \frac{P}{\pi b^2 \epsilon_1}$$

$$= E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$$\frac{2E_m E_f V_f (v_f - v_m)^2 (1 - V_f)}{E_f (2v_m^2 V_f - v_m + V_f v_m - V_f - 1) + E_m (-1 - 2V_f v_f^2 + v_f - V_f v_f + 2v_f^2 + V_f)}$$

■ معادله نسبت پوآسون اصلی به روش الاستیسیته

$$v_{12} = v_f V_f + v_m V_m$$

$$+ \frac{V_f V_m (v_f - v_m) (2E_f v_m^2 + v_m E_f - E_f + E_m - E_m v_f - 2E_m v_f^2)}{(2v_m^2 V_f - v_m + v_m V_f - 1 - V_f) E_f + (2v_f^2 - V_f v_f - 2V_f v_f^2 + V_f + v_f - 1) E_m}$$

■ معادله مدول الاستیک عرضی به روش الاستیسیته

$$E_2 = 2(1 + v_{23})G_{23}$$

$$v_{23} = \frac{K^* - mG_{23}}{K^* + mG_{23}}$$

$$m = 1 + 4K^* \frac{v_{12}^2}{E_1}$$



$$K^* = \frac{K_m (K_f + G_m) V_m + K_f (K_m + G_m) V_f}{(K_f + G_m) V_m + (K_m + G_m) V_f} .$$

$$K_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} .$$

$$K_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} .$$

$$A \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right)^2 + 2B \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right) + C = 0 ,$$

where

$$A = 3V_f (1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right)$$

$$+ \left[\frac{G_f}{G_m} \eta_m + \eta_f \eta_m - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \left[V_f \eta_m \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m + 1 \right) \right]$$

$$B = -3V_f (1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\eta_m \frac{G_f}{G_m} + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) \right]$$

$$- 2 \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \left] + \frac{V_f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left[\frac{G_f}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right]$$



$$C = 3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right)$$

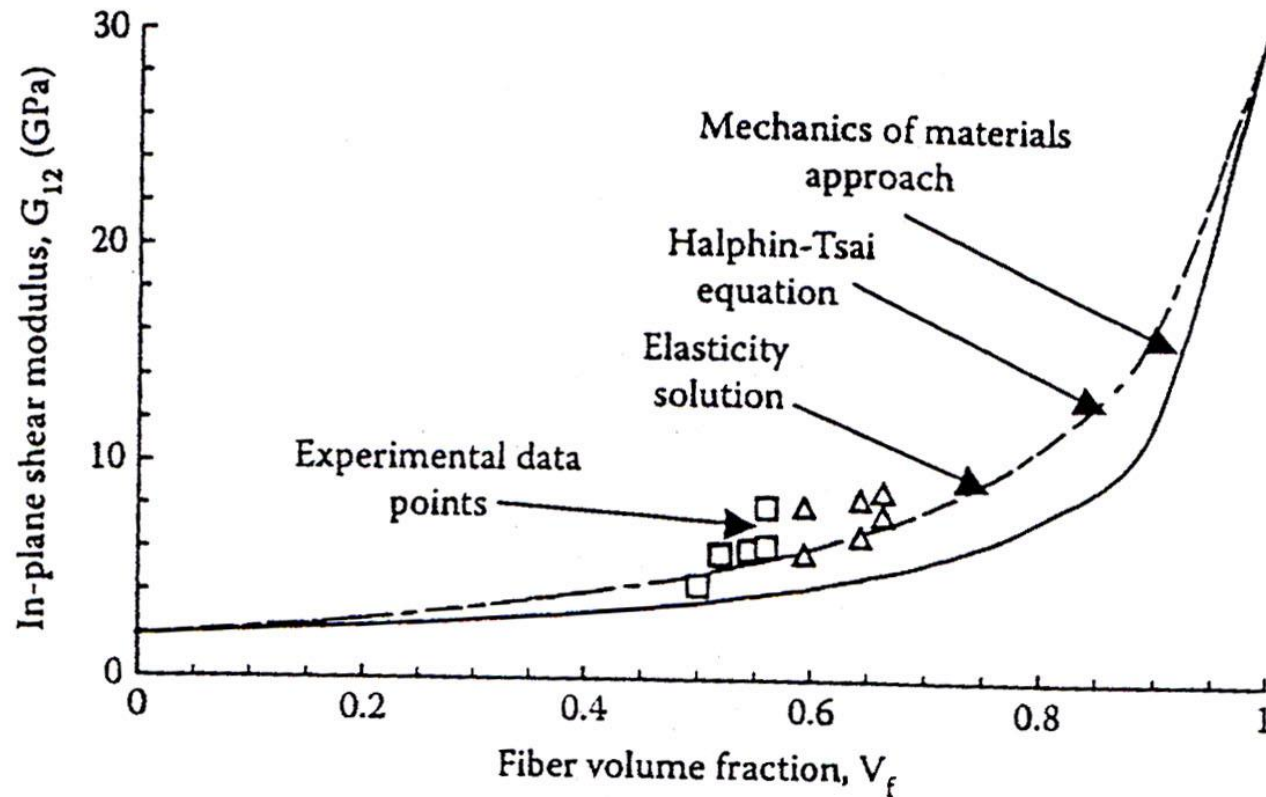
$$+ \left[\eta_m \frac{G_f}{G_m} + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[\frac{G_f}{G_m} + \eta_f + \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right]$$

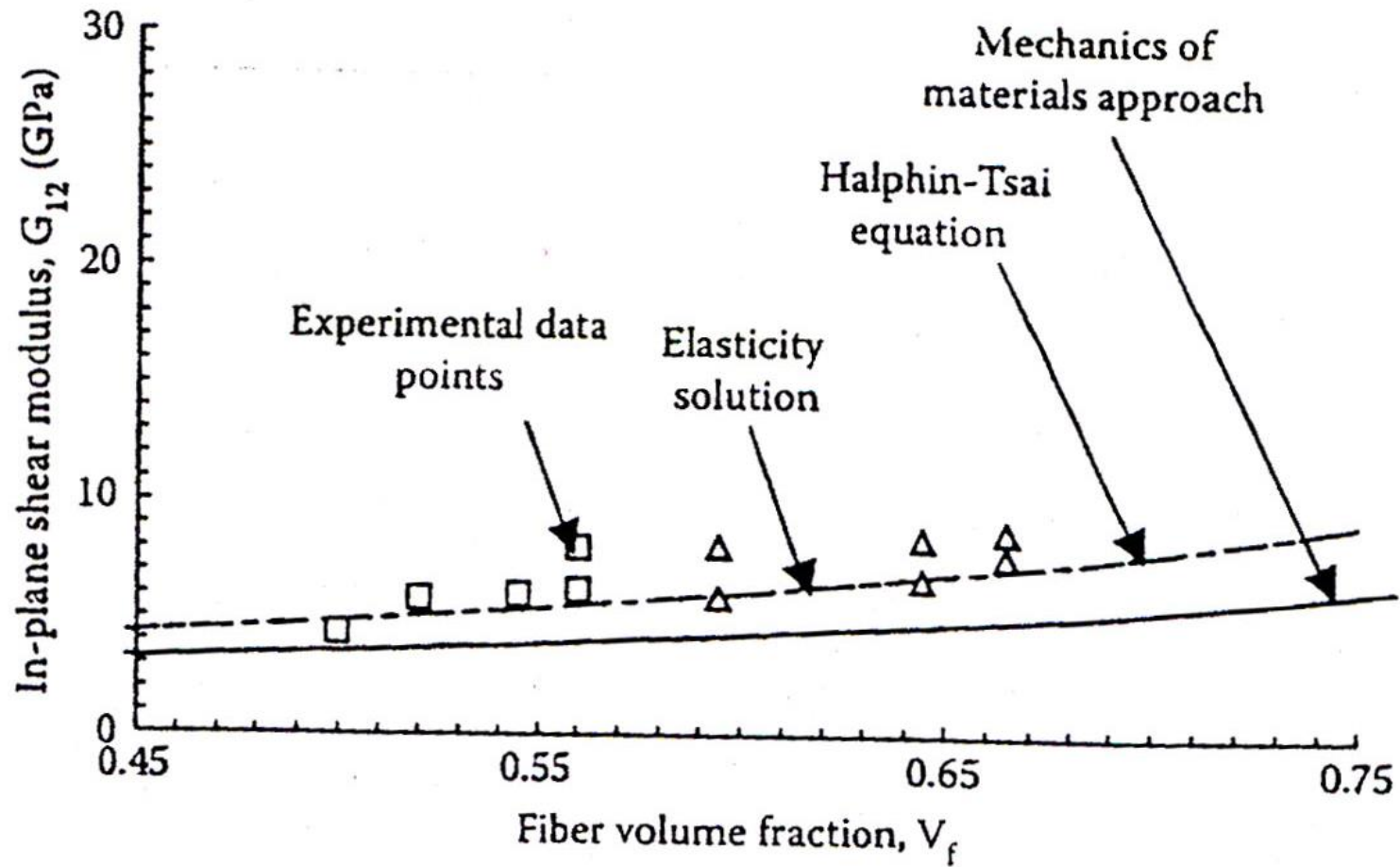
$$\eta_m = 3 - 4v_m$$

$$\eta_f = 3 - 4v_f$$

$$G_{12} = G_m \left[\frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \right]$$

شکل زیر و شکل ۱۴ نتایج مدول برشی به دست آمده از سه روش مقاومت مصالح، الاستیسیته و نیمه تجربی را برای تک لایه شیشه/اپوکسی مقایسه می کند.





شکل ۱۴ : مقایسه نتایج مدول برشی به دست آمده از سه روش مقاومت مصالح، الاستیسیته و نیمه تجربی برای یک تک لایه شیشه/اپوکسی

□ ضریب انبساط حرارتی:

تعریف: وقتی که جسمی در معرض تغییر حرارت قرار گرفت، ابعاد آن نسبت به ابعاد اولیه متناسب با تغییر دما، تغییر پیدا می کند.

ضریب انبساط حرارتی عبارت است از تغییر خطی ابعاد طولی نسبت به طول اولیه متناسب با دمای اعمالی به آن.

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l \Delta T} \left[\frac{m}{m.^\circ C} \right]$$

برای یک تک لایه تک جهته، ابعاد در هر دو بعد ۱ و ۲ تغییر می کند. بنابراین دو ضریب انبساط حرارتی تعریف می کنیم.

برای مواد هموزن و ایزوتروپ ضریب انبساط حرارتی در دو جهت یکسان می شود.

$$\alpha_1 = \text{ضریب انبساط حرارتی طولی (ضریب انبساط حرارتی خطی در جهت ۱)}$$

$$\alpha_2 = \text{ضریب انبساط عرضی}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{E_1} (\alpha_f E_f \nu_f + \alpha_m E_m \nu_m) \quad (۳-۶۸)$$

α_f و α_m ضریب انبساط حرارتی لیف و ماتریس است.

می توان رابطه (۳-۶۸) را از طریق مقاومت مصالح اثبات کرد. در نظر بگیرید تغییرات طولی یک لایه تک جهته در جهت طولی، اگر هیچ نیرویی وارد نکنیم و فقط دما را افزایش دهیم.

$$F_1 = \sigma_1 A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m = 0 \quad * \rightarrow \sigma_f v_f + \sigma_m v_m = 0$$

F_f F_m

* $A =$ سطح مقطع است و چون طول ها برابر است به جای آن از کسر حجمی استفاده می کنیم.

نکته: به دلیل اینکه ضریب انبساط لیف و ماتریس متفاوت است، یک تنش ناشی از این اختلاف در کامپوزیت ایجاد می شود.

تنش ناشی از اختلاف انبساط حرارتی + تنش ناشی از انبساط حرارتی در لیف = تنش کل در لیف
میان لیف و ماتریس

$$E_f \varepsilon_f = \sigma_f + E_f (\text{کرنش حرارتی}) = \sigma_f + E_f (\alpha_f \Delta T)$$



تنش ناشی از اختلاف انبساط حرارتی + تنش ناشی از انبساط حرارتی در ماتریس = تنش کل در ماتریس
میان لیف و ماتریس

$$E_m \varepsilon_m = \sigma_m + E_m (\text{کرنش حرارتی}) = \sigma_m + E_m (\alpha_m \Delta T)$$

جایگذاری در رابطه:

$$E_f (\varepsilon_f - \alpha_f \Delta T) \nu_f + E_m (\varepsilon_m - \alpha_m \Delta T) \nu_m = 0$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 : \text{Iso strain}$$

$$\varepsilon_f (E_f \nu_f + E_m \nu_m) = \Delta T (E_m \cdot \alpha_m \cdot \nu_m + E_f \cdot \alpha_f \cdot \nu_f)$$



$$\varepsilon_1 = \alpha_1 \Delta T$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\Delta T} = \frac{\varepsilon_f}{\Delta T} = \frac{\alpha_f \cdot E_f \cdot \nu_f + \alpha_m \cdot E_m \cdot \nu_m}{E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot \nu_m} \rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{E_1} (\alpha_f \cdot E_f \cdot \nu_f + \alpha_m \cdot E_m \cdot \nu_m)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\alpha_1 = \left(\frac{\alpha_f \cdot E_f}{E_1} \right) \nu_f + \left(\frac{\alpha_m \cdot E_m}{E_1} \right) \nu_m$$

در جهت عرضی نیز می توان همین اثبات ها را نوشت و روابط را به دست آورد.

تنش ناشی از اختلاف انبساط حرارتی + تنش حرارتی در لیف = تنش کل حرارتی در جهت ۱
میان لیف و ماتریس

$$(\sigma_f)_1 = E_f \varepsilon_f = E_f \varepsilon_1$$

با جایگذاری کردن می توان نوشت:

$$E_f (\alpha_1 \Delta T) = (\sigma_f)_1 + (E_f (\alpha_f \Delta T))$$

$$(\sigma_f)_1 = E_f (\alpha_1 \Delta T) - E_f (\alpha_f \Delta T) = E_f (\alpha_1 - \alpha_f) \Delta T$$

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E_T} - \nu_{lT} \frac{\sigma_l}{E_l}$$

با جای گذاری به رابطه زیر می رسیم:

$$\alpha_2 = (1 + \nu_f) \alpha_f \nu_f + (1 + \nu_m) \alpha_m \nu_m - \alpha_1 \nu_{12}$$

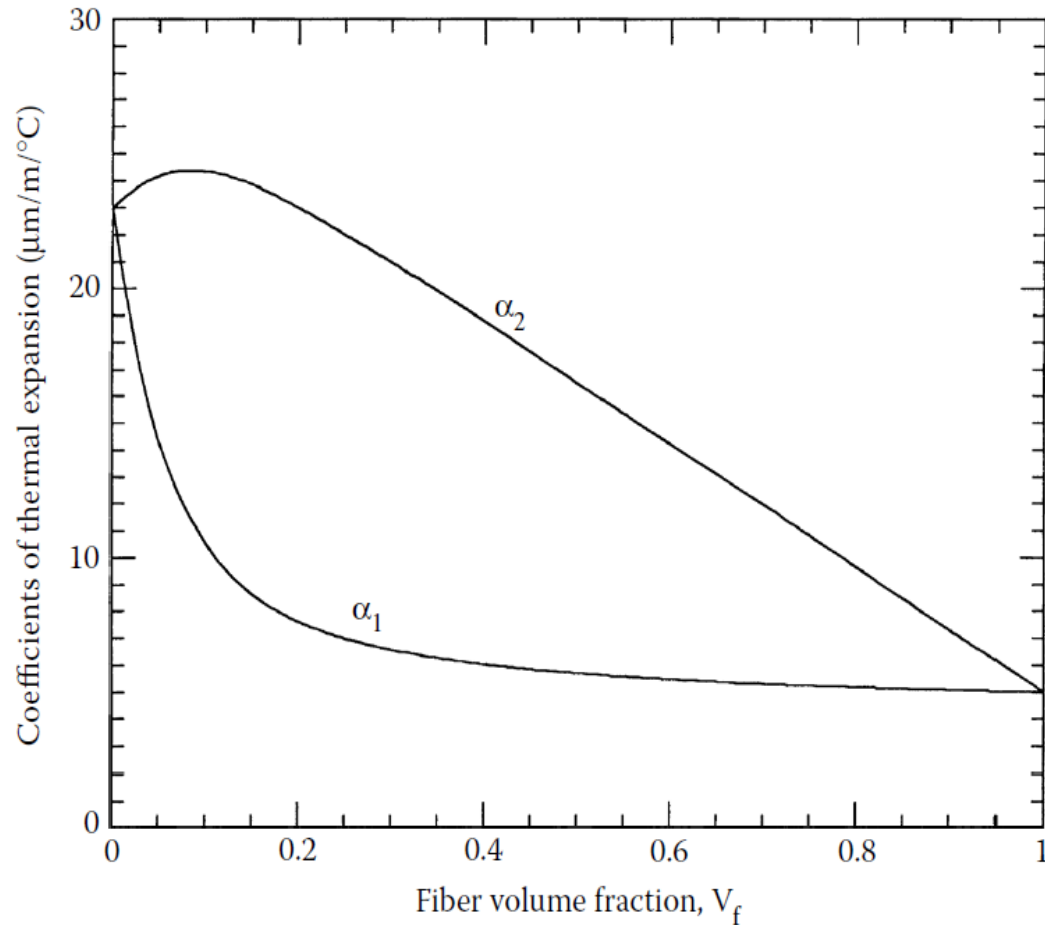


FIGURE 3.38
Longitudinal and transverse coefficients of thermal expansion as a function of fiber volume fraction for a glass/epoxy unidirectional lamina. (Properties of glass and epoxy from Table 3.1 and Table 3.2.)

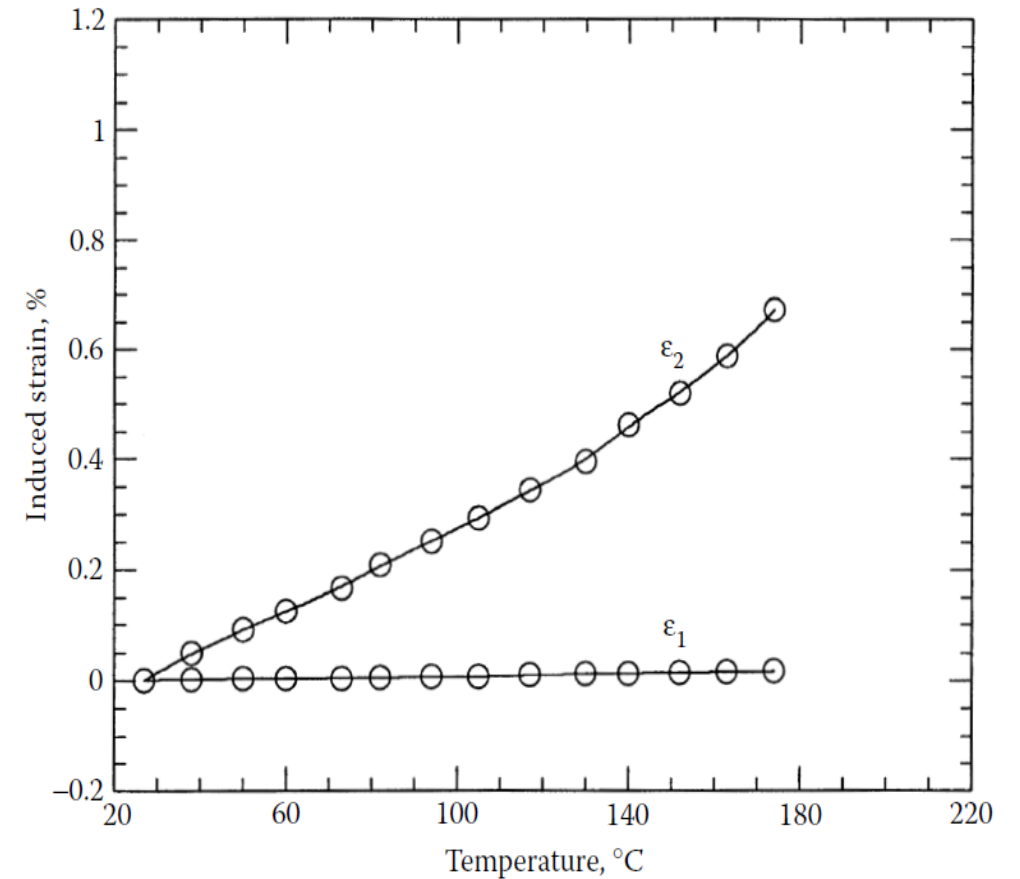


FIGURE 3.40
Induced strain as a function of temperature to find the coefficients of thermal expansion of unidirectional graphite/epoxy laminate. (Reprinted with permission from *Experimental Characterization of Advanced Composites*, Carlsson, L.A. and Pipes, R.B., Technomic Publishing Co., Inc. 1987, p. 102. Copyright CRC Press, Boca Raton, FL.)



مثال:

برای یک کامپوزیت الیاف شیشه در کامپوزیت اپوکسی با کسر حجمی الیاف ۷۰٪ با استفاده از جداول ضریب انبساط طولی و عرضی کامپوزیت را به دست آورد.

$$E_f = 85 \text{ GPa} , \quad E_m = 3.4 \text{ GPa} , \quad E_1 = 60.52 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.2 , \quad \nu_m = 0.3 , \quad \nu_{12} = 0.23$$

$$\alpha_f = 5 \times 10^{-6} \frac{m}{m^{\circ}C} , \quad \alpha_m = 63 \times 10^{-6} \frac{m}{m^{\circ}C}$$

$$\alpha_1 = ? , \quad \alpha_2 = ?$$

□ ضریب انبساط رطوبتی

وقتی یک جسمی آب جذب کند مخصوصا در کامپوزیت های پلیمری انبساط ایجاد می شود. مانند حالت قبل ضریب انبساط رطوبتی طولی و عرضی داریم.

تفاوت با ضریب انبساط حرارتی :

وزن جذب لیف و ماتریس با یکدیگر متفاوت است. بعضی وقت ها الیاف جذب رطوبت ندارند در این حالت برای الیاف می توان ΔC_f را صفر در نظر گرفت. مثلا الیاف کربن و شیشه جذب رطوبت ندارند ولی کولار و شیشه جب رطوبت دارند.

اگر یک شبکه داشته باشیم که $E_f \gg E_m$ (مدول ماتریس $>$ مدول لیف) باشد می توان انبساط طولی ناشی از رطوبت را صفر در نظر بگیریم مانند ترکیب اپوکسی / گرافیت.



تنش ناشی از اختلاف انبساط رطوبتی + تنش ناشی از انبساط رطوبتی در لیف = تنش کل در لیف
میان لیف و ماتریس

$$E_f \varepsilon_f = \sigma_f + E_f (\text{کرنش رطوبتی}) = \sigma_f + E_f (\beta_f \Delta C_f)$$

$$\sigma_f = E_f (\varepsilon_f - \beta_f \Delta C_f)$$

از همین طریق می توان نوشت

$$E_m \varepsilon_m = \sigma_m + E_m (\text{کرنش رطوبتی}) = \sigma_m + E_m (\beta_m \Delta C_m)$$

$$\sigma_m = E_m (\varepsilon_m - \beta_m \Delta C_m)$$

در نظر بگیرید تغییرات طولی یک لایه تک جهته در جهت طولی، اگر هیچ نیرویی وارد نکنیم و فقط رطوبت محیط را افزایش دهیم.

$$F_1 = \sigma_1 A_c = \cancel{\sigma_f A_f} + \cancel{\sigma_m A_m} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_f v_f + \sigma_m v_m = 0$$

$F_f \qquad F_m$

* $A =$ سطح مقطع است و چون طول ها برابر است به جای آن از کسر حجمی استفاده می کنیم.

جایگذاری در رابطه:

$$E_f (\varepsilon_f - \beta_f \Delta C_f) v_f + E_m (\varepsilon_m - \beta_m \Delta C_m) v_m = 0$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 : \text{Iso strain}$$

$$\varepsilon_f (E_f v_f + E_m v_m) = \Delta C_m \cdot E_m \cdot \beta_m \cdot v_m + \Delta C_f \cdot E_f \cdot \beta_f \cdot v_f$$



$$\varepsilon_f = \frac{\Delta C_m \cdot E_m \cdot \beta_m \cdot v_m + \Delta C_f \cdot E_f \cdot \beta_f \cdot v_f}{E_f v_f + E_m v_m}$$

$$\varepsilon_1 = \beta_1 \Delta C_c$$

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\Delta C_c} = \frac{\varepsilon_f}{\Delta C_c} = \frac{\Delta C_m \cdot E_m \cdot \beta_m \cdot v_m + \Delta C_f \cdot E_f \cdot \beta_f \cdot v_f}{(E_f v_f + E_m v_m) \Delta C_c}$$

$$\beta_1 = \frac{\Delta C_m \cdot E_m \cdot \beta_m \cdot v_m + \Delta C_f \cdot E_f \cdot \beta_f \cdot v_f}{E_1 (\Delta C_f \rho_f v_f + \Delta C_m \rho_m v_m)} \rho_c$$



$$\beta_2 = \frac{\nu_f (1 + \nu_f) \Delta C_f \beta_f + \nu_m (1 + \nu_m) \Delta C_m \beta_m}{(\Delta C_f \rho_f \nu_f + \Delta C_m \rho_m \nu_m)} \rho_c - \beta_1 \nu_{12}$$

اگر $\Delta C_f = 0$ باشد یعنی لیف جذب رطوبت ندارد.:

$$\beta_1 = \frac{E_m \rho_c}{E_1 \rho_m} \beta_m$$

$$\beta_2 = (1 + \nu_m) \frac{\rho_c}{\rho_m} \beta_m - \beta_1 \nu_{12}$$

یعنی جذب رطوبت صورت نمی گیرد، آنگاه می توان کسر حجمی را به کسر وزنی تبدیل کرد.



این معادله نشان می دهد مقدار کل رطوبت جذب شده در کامپوزیت برابر با مجموع رطوبت جذب شده توسط لیف و ماتریس است.

$$\Delta C_m W_c = \Delta C_f W_f + \Delta C_m W_m$$

طرفین رابطه را بر W_c تقسیم می کنیم:

$$\Delta C_m = \Delta C_f W_f + \Delta C_m W_m$$

حال رابطه β_1 را بازنویسی می کنیم:

$$\beta_1 = \frac{\Delta C_m \cdot E_m \cdot \beta_m \cdot v_m + \Delta C_f \cdot E_f \cdot \beta_f \cdot v_f}{(E_f v_f + E_m v_m)(\Delta C_f W_f + \Delta C_m W_m)}$$



مثال:

مطلوب است محاسبه ضریب انبساط رطوبتی طولی و عرضی یک کامپوزیت ۷۰٪ شیشه و اپوکسی؟

$$\rho_f = 2500 \text{ kgm}^{-3}, \quad \rho_m = 2500 \text{ kgm}^{-3} \quad \beta_1 = ?, \beta_2 = ?$$

$$E_m = 3.4 \text{ GPa}, \quad E_m = 60.52 \text{ GPa}$$

$$\nu_m = 0.3, \quad \nu_{12} = 0.230$$

$$\beta_m = 0.33 \text{ m/m/kg/kg}$$

$$\rho_c = \rho_m \nu_m + \rho_f \nu_f = 2110 \text{ kg.m}^{-3}$$

نکته:

وقتی کامپوزیت را در محیط مرطوب قرار دهیم، شروع به جذب رطوبت می کند تا به تعادل برسد و وقتی کامپوزیت را از محیط با رطوبت بالاتر خارج کنیم، شروع به از دست دادن رطوبت می کند. نرخ از دست دادن رطوبت خیلی مهم است. شاید هیچ وقت به صفر نرسد.

□ استحکام مواد کامپوزیتی تک لایه جهت:

مقدمه:

پیش بینی استحکام کامپوزیت ها به اندازه سطح سفتی مورد بررسی قرار نگرفته است و تعداد کاربردهای عملی بر اساس تک لایه انجام شده بسیار کم است. کشش عرضی مخصوصا استحکام کشش عرضی بسیار کمتر از استحکام طولی است، چون در اندازه گیری استحکام طولی الیاف درگیرند اما در اندازه گیری استحکام عرضی ماتریس است که وارد عمل می شود.

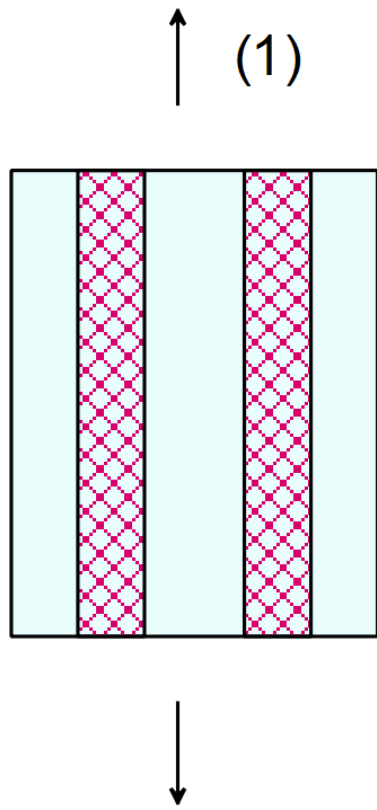
استحکام الیاف بیشتر است. در جهت (۱) در کشش، الیاف درگیرند اما در جهت (۲) ماتریس وارد عمل شده و Interface نیز معنا پیدا می کند که یک ضعف است.

فرق استحکام با مدول این است که مدول مقاومت در برابر تغییر شکل است. مدول عرضی افزایش پیدا می کند چون مدول ذاتی عرضی بالاست. در حالت طولی، استحکام بالا و در حالت عرضی چون ماتریس تحمل اش را ندارد، استحکام عرضی کم است.

(۲) شکست بر اساس شرایط بار گذاری است و استحکام وابسته به شکست است و شکس وابسته به ضعف های محلی است.

۱. شروع شکست ، ۲. رشد و ۳. خاتمه آن تحت تاثیر نوع بار گذاری و جهت گیری الیاف است.

نکته: مدول عرضی لیف در ماتریس از مدول لیف جداگانه بیشتر است.





استحکام	σ_{1T}^* استحکام طولی کششی	σ_{1c}^* استحکام طولی پرسی	σ_{2T}^* استحکام عرضی کششی	σ_{2c}^* استحکام عرضی پرسی	$\tau_{\#}^*$ استحکام برشی
مواد					
شیشه (ایزوتروپ) / پلی استر	650-750	600-900	20-25	90-120	45-60
کربن I (آن ایزوتروپ) / اپوکسی	850-1100	700-900	35-40	130-140	60-75
کولار 49 (آن-ایزوتروپ) / اپوکسی	1100-1250	240-290	20-30	110-140	40-60



دیده می شود که استحکام به نوع بار گذاری و جنس سازه وابسته است. در حالت اول، لیف ایزوتروپ است و در فشار و کشش رفتار یکسانی دارد. اما نمونه سوم، تفاوت رفتار زیادی در حالت کشش و فشار دارد، چون آن ایزوتروپ است و حالت پلیسه ای دارد (الیاف کولار) و در مقابل نیروی فشاری ضعیف عمل می کند. رفتار عرضی نمونه ها بسیار ضعیف است، چون ماتریس دیکته می کند.

مکانیزم شکست + نوع بار گذاری دیکته کننده استحکام است. در رفتار عرضی در حالت فشار، رفتار از حالت کشش بهتر است چون ماتریس دیکته کننده است. همچنین در حالت عرضی چه در رفتار کششی و چه در رفتار فشاری، Interface متفاوت عمل می کند.

اگر بخواهیم استحکام را درک کنیم، باید مکانیسم بار گذاری و قرار گرفتن الیاف را درک کنیم. عیوب در اینجا نقش زیادی دارد. موقعیت عیوب، الیاف و سطح مشترک در سازه، تعیین کننده استحکام است.

معیارهای شکست متفاوتی در کامپوزیت ها وجود دارد. هدف اصلی از کامپوزیت، بیشتر سفتی یا مدول در راستای الیاف است. با استفاده از طراحی لایه ها می توان عیوب را حذف کرد و یا تقویت کرد. کامپوزیت یک سیستم است به عبارت دیگر بایستی طبق ورودی ها، خروجی را مشخص کرد.

□ استحکام کششی:

با فرض مقاومت مصالح، یک کامپوزیت تقویت شده لیفی تک جهت و وقتی تغییر شکل پیدا می کند که بارگذاری شود. این تغییر شکل می تواند حالت های مختلفی را به خود بگیرد و بستگی به تردی یا چکش خواری الیاف و ماتریس دارد.

انواع شکست:

۱. هر دو الیاف و ماتریس به طور الاستیک تغییر شکل می دهند. (هر دو از قانون هوک پیروی می کنند)

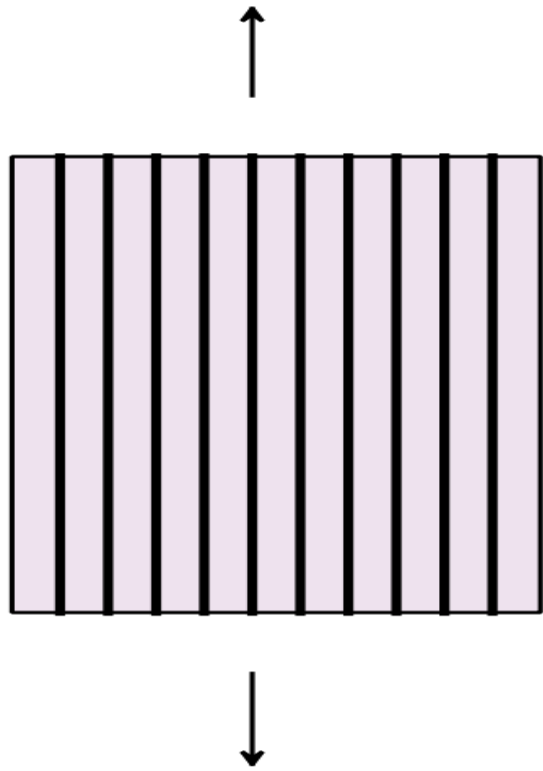
۲. الیاف به صورت الاستیک و ماتریس به صورت پلاستیک تغییر شکل می دهند. (ویسکوالاستیک + الاستیک)

۳. الیاف و ماتریس به صورت پلاستیک تغییر شکل می دهند.

۴. الیاف شکسته می شوند و به دنبال آن کامپوزیت شکسته می شود.

الیاف با استحکام یکسان:

یعنی استحکام لیف در کل یکسان است و لیف تغییر خواص ندارد. تک لایه را در نظر بگیرید که یک نیرو در جهت طولی به آن وارد شده است:





$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c \quad \text{Iso strain}$$

$$F_c = F_f + F_m \rightarrow F_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

$$\sigma_c = \sigma_f \frac{A_f}{A_c} + \sigma_m \frac{A_m}{A_c}$$

چون طول ها برابر است می توان از کسر حجمی استفاده نمود.

$$v_f = \frac{A_f}{A_c} \cdot v_m = \frac{A_m}{A_c}$$

$$\sigma_c = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m$$

قانون اختلاط



$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E$$

$$\frac{d\sigma_c}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma_f}{d\varepsilon} v_f + \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon} v_m \rightarrow E_c = E_f v_f + E_m v_m$$

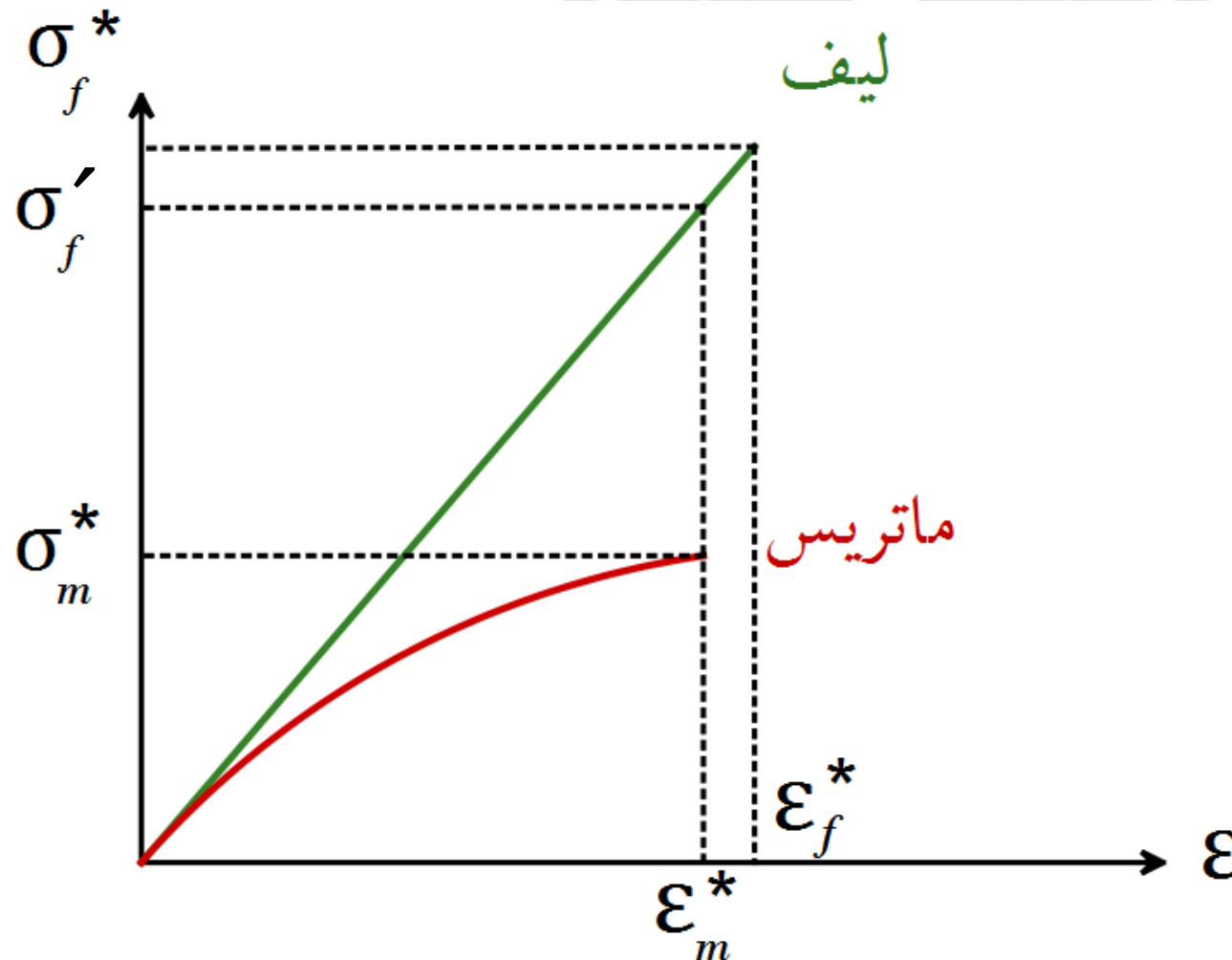
قانون اختلاط

$$\sigma_c = \sum_{i=1}^n \sigma_i v_i$$

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_i v_i$$



فرض کنید $\epsilon_f^* > \epsilon_m^*$ یعنی لیف Ductile تر است. به عبارت دیگر کرنش تا شکست ماتریس کمتر از کرنش تا شکست لیف می باشد، لیف بیشتر کشیده می شود تا بشکند و ماتریس نسبت به لیف شکننده تر است.





حالت اول:

v_f مقدار کمی داشته باشد:

در این حالت بار روی الیاف می افتد و الیاف نمی توانند تحمل کنند و میشکند، بنابراین در این حالت σ_f' تعریف می کنیم و تحت عنوان استحکام الیاف در کرنش ماتریس بیان می شود.

$$\sigma_f' = (\sigma_f)_{\varepsilon_{mmax}} = (\sigma_f)_{\varepsilon_m^*} = (\sigma_f)_{\varepsilon_{multimate}^*}$$

$$\sigma_1^* = \sigma_f' v_f + \sigma_m^* (1 - v_f)$$

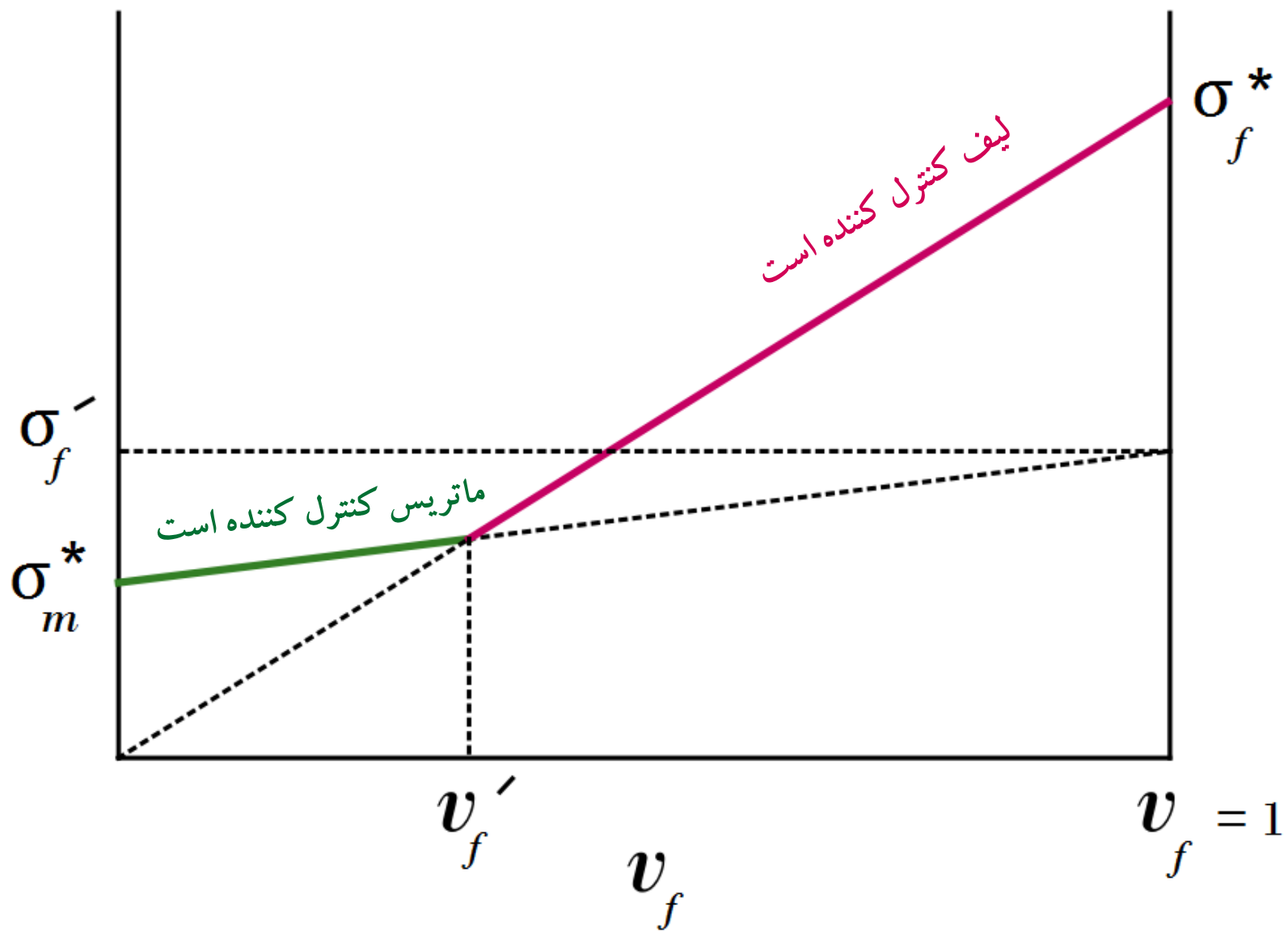
v_f مقدار زیادی داشته باشد:

الیاف می توانند باری که بر آنها افتاده و اعمال شده را تحمل کنند، زیرا تعداد شان زیاد است.

$$\sigma_1^* = \sigma_f^* v_f$$

$$v_f' = \frac{\sigma_m^*}{\sigma_f^* - \sigma_f' + \sigma_m^*}$$

همانطور که در شکل نشان داده شده است، استحکام تا شکست با مقدار v_f تغییر می کند و نقطه تقاطع دو نمودار استحکام تا شکست ماتریس و لیف در کسر حجمی های مختلف، به ما کسر حجمی الیاف را می دهد که کمترین میزان کسر حجمی ممکن است و در کسر حجمی های کمتر از آن کامپوزیت تعریف نمی گردد.





کامپوزیت تک لایه پلی استر با مشخصات اعلام شده در زیر:

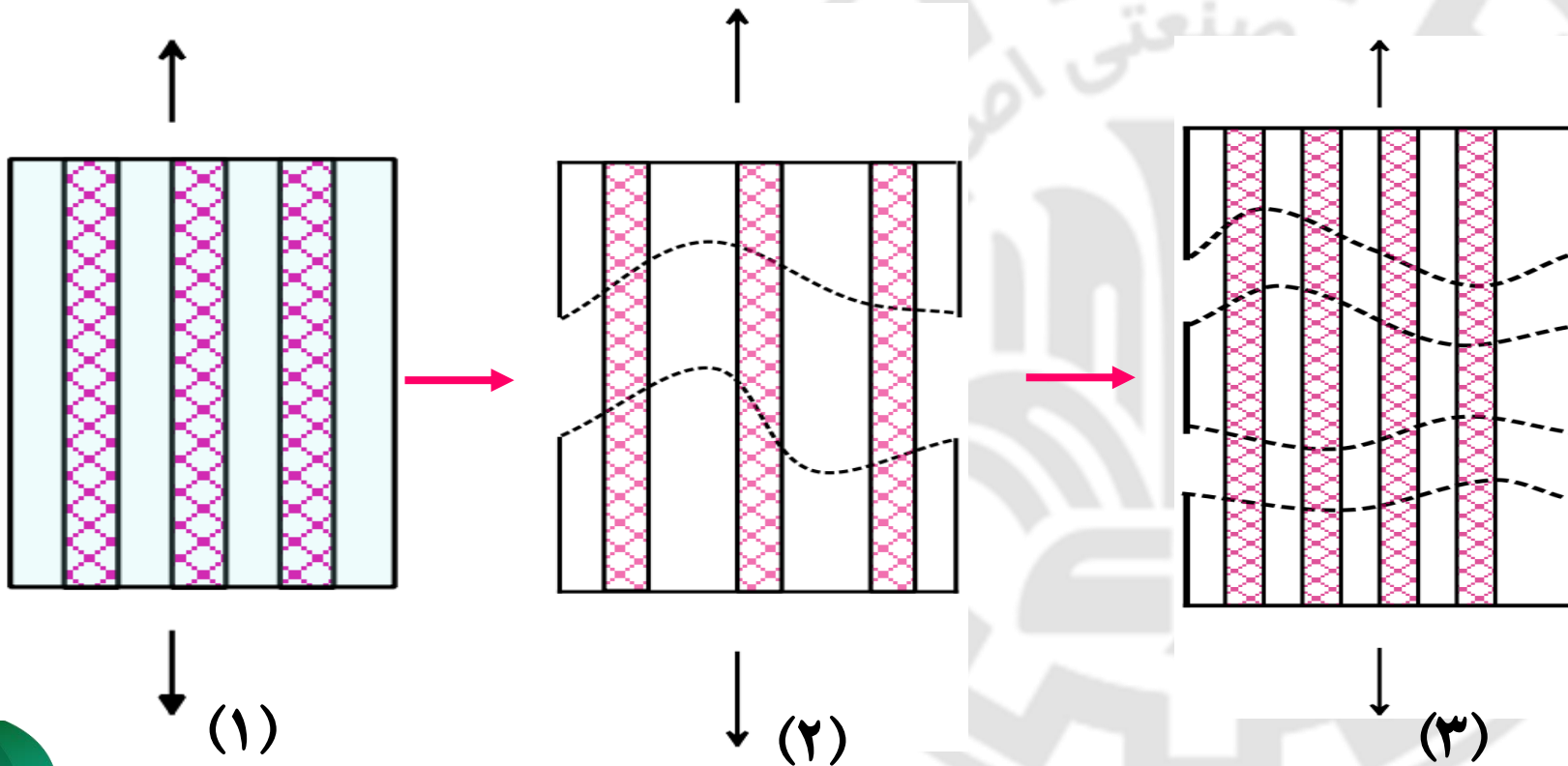
$$\sigma_f^* = 2100 \text{ MPa} \cdot \sigma_m^* = 72 \text{ MPa} \cdot \varepsilon_f^* = 0.020 \cdot \varepsilon_m^* = 0.025 \cdot E_f = 76 \text{ GPa}$$

مطلوب است محاسبه کسر حجمی (v_f') min ؟

می توان نتیجه گرفت که در کامپوزیت ها کسر حجمی الیاف ۴۰-۶۰ درصد است. حداقل مقدار کسر حجمی تقویت کننده در این جا ۱۱٪ است و کمتر از آن نمی توان استفاده کرد. کمتر از ۱۱٪ افزایش خواص نداریم و همیشه باید $v_f > v_f'$ باشد زیرا در این حالت است که می تواند بار را تحمل کند. در اینجا شکستگی های متوالی ماتریس اتفاق افتاده است.

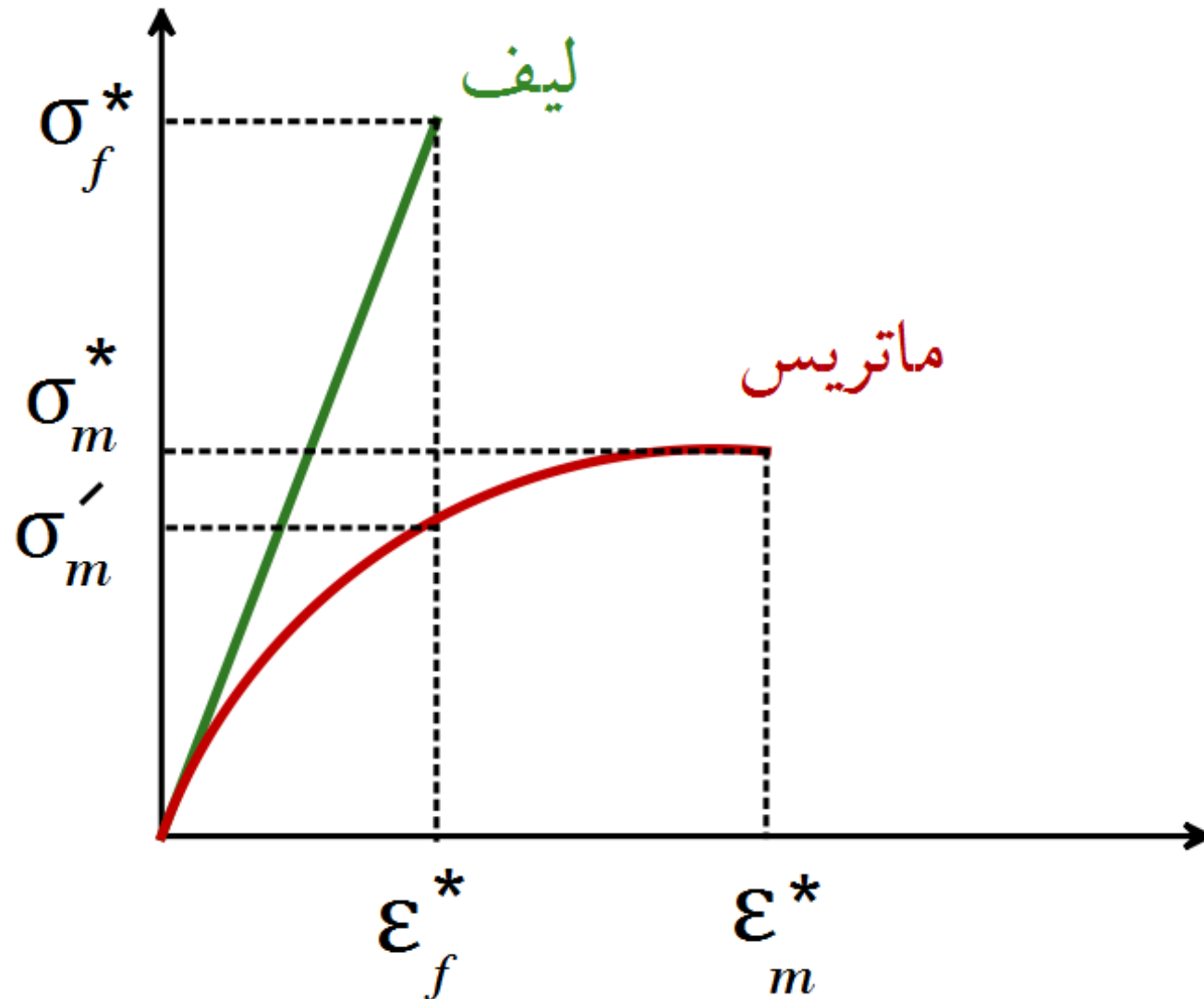


شکل نشان می دهد در حالت (۲) ترک اول اتفاق افتاده است و از اینجا شکست شروع شده است. و پس از آن شکست های دیگری در شکل (۳) اتفاق افتاده است. به عبارت دیگر در حالت $v_f > v_f'$ به شرطی که بار منتقل شود، ترک در ماتریس جلو می رود.





اگر ماتریس ductile تر از الیاف است در واقع $\epsilon_f^* < \epsilon_m^*$ و نمودار آن به صورت زیر می شود:



حالت اول:

v_f مقدار کمی داشته باشد:

در اینجا فرض کردیم کرنش تا شکست ماتریس از لیف بیشتر است. نوع شکست وابسته به کسر حجمی الیاف است اگر v_f کم باشد وقتی الیاف شکسته می شوند ماتریس قدرت تحمل شکست کامپوزیت را دارد.

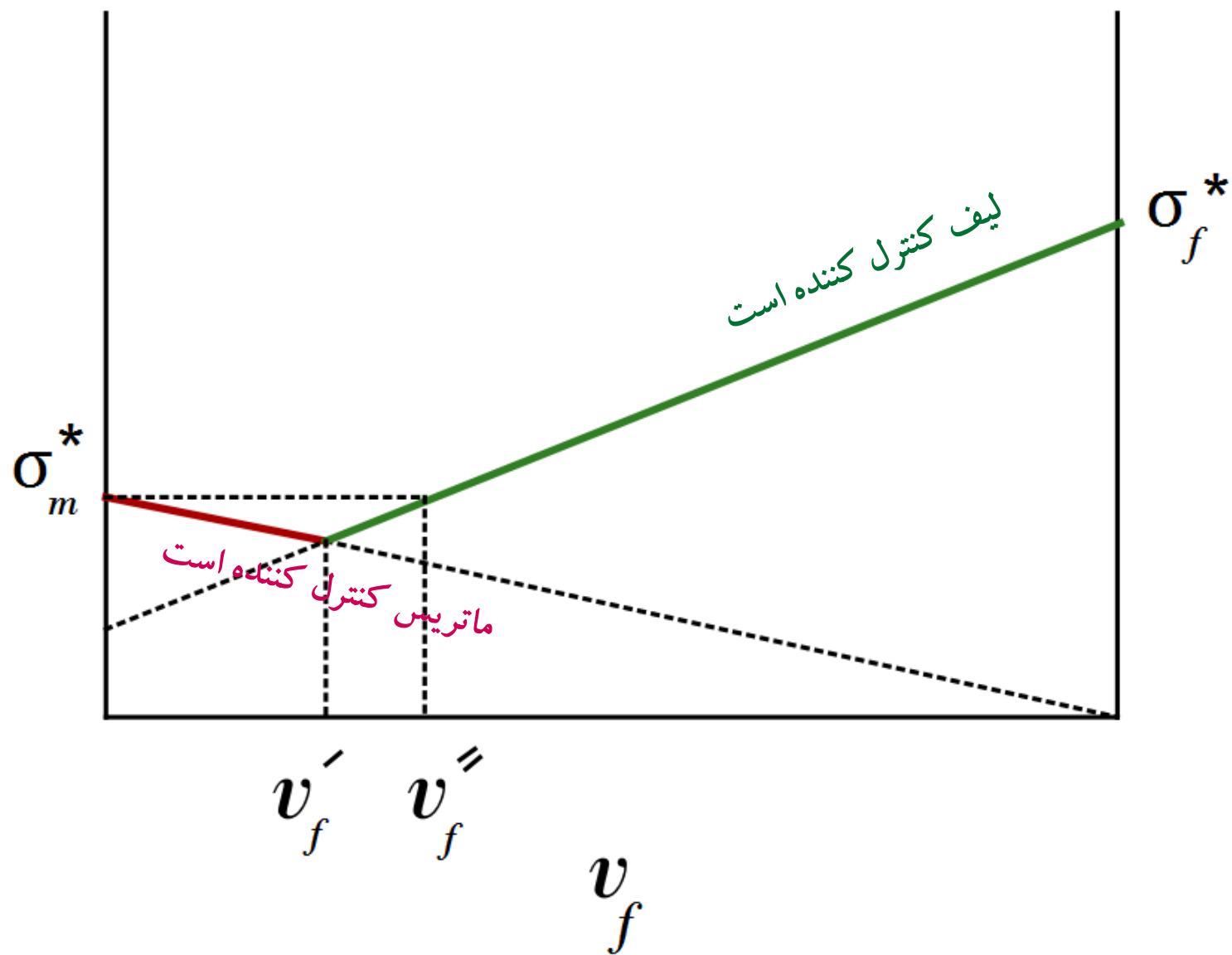
$$\sigma_1^* = \sigma_m^* v_m^* = \sigma_m^* (1 - v_f)$$

حالت دوم:

v_f مقدار زیادی داشته باشد:

در این حالت زمانی که الیاف شکسته می شوند، ماتریس نیز می شکنند زیرا مقدار آن کم است.

$$\sigma_1^* = \sigma_f^* v_f + \sigma_m' (1 - v_f)$$





همانطور که در شکل نشان داده شده است، فقط می توان از مقدار v_f بالا، ماتریس را تقویت کرد. با مساوی قرار دادن نمودارها خواهیم داشت:

$$v_f' = \frac{\sigma_m^* - \sigma_m'}{\sigma_f^* + \sigma_m^* - \sigma_m'}$$

$$v_f'' = \frac{\sigma_m^* - \sigma_m'}{\sigma_f^* - \sigma_m^*}$$

برای تعیین خواص طولی استحکام باید v_f کمتر از v_f'' نشود تا ماتریس تقویت شود.



مثال:

کربن نوع ۱/۱ اپوکسی یک کامپوزیت تشکیل داده است. کسر حجمی min را به دست آورید.

$$\sigma_f^* = 2.0 \text{ GPa} . \sigma_m^* = 80 \text{ MPa} . \epsilon_f^* = 0.005 . \epsilon_m^* = 0.02 . E_m = 5.3 \text{ GPa}$$

$$\sigma_m^* = E_m \epsilon_m^*$$

$$\sigma_m' = E_m \epsilon_f^*$$

پلی اتر اتر کتون (PEEK) با ۳۰٪ حجمی الیاف کربن تک جهت تقویت شده است. مناسب است حجم بحرانی و min الیاف در این جهت:

فرض کنید استحکام کششی PEEK در کرنش لیف یعنی $\sigma_m' = 0.058 \text{ GPa}$ و الیاف کربن 2.1 GPa باشد. همچنین $\sigma_m^* = 62 \text{ MPa}$ (استحکام شکست PEEK)



بحث خیلی مهم حجم بحرانی تقویت کننده را بیان کردیم، حال می خواهیم توزیع شکست را بیان کنیم:

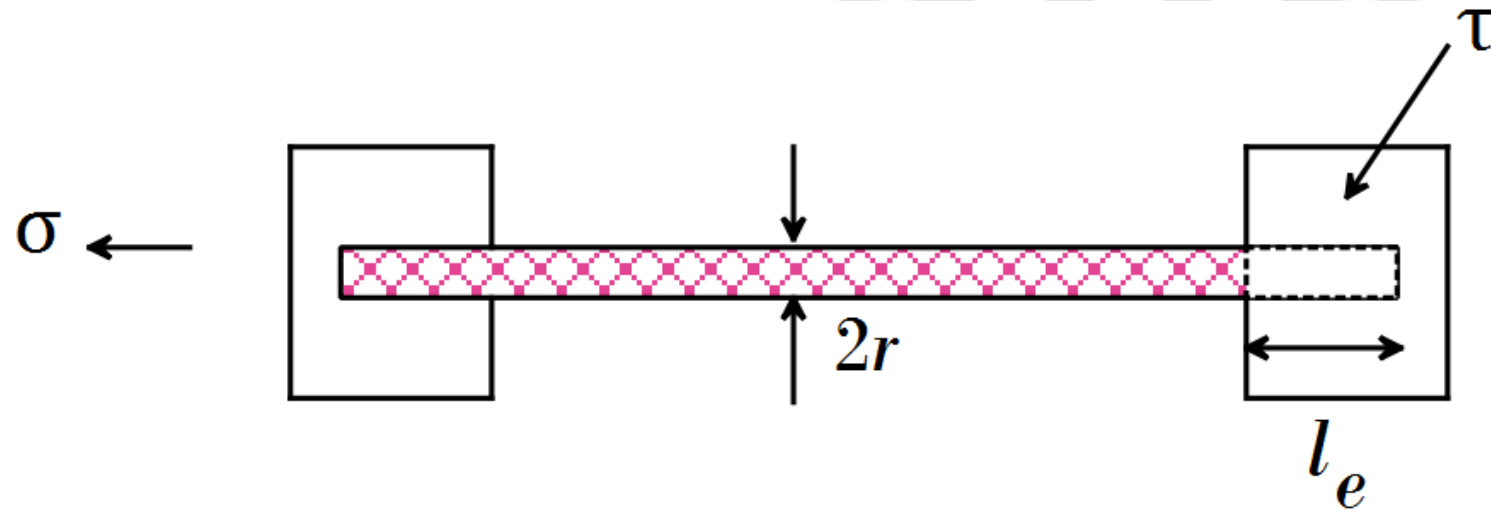
□ بیرون کشیده شدن لیف: fiber pull out

نشان دادیم شکستگی انواع مختلفی دارد. بدیهی است که ترک خوردن الیاف در رزین قبل از جدا شدن کامل در سطح صورت می گیرد. دو سطحی که شکسته شده توسط الیاف به هم نگهداشته می شوند و پل زده می شود.

فرض کنیم شکست ماتریس اتفاق افتاده است و لیف از داخل کامپوزیت بیرون کشیده می شود. برای این کار یک قالب از پلیمر (ماتریس) تهیه کرده و در دو سر لیف قرار می دهیم. به لیفی که در ماتریس جایگذاری شده است، embedded گفته می شود.

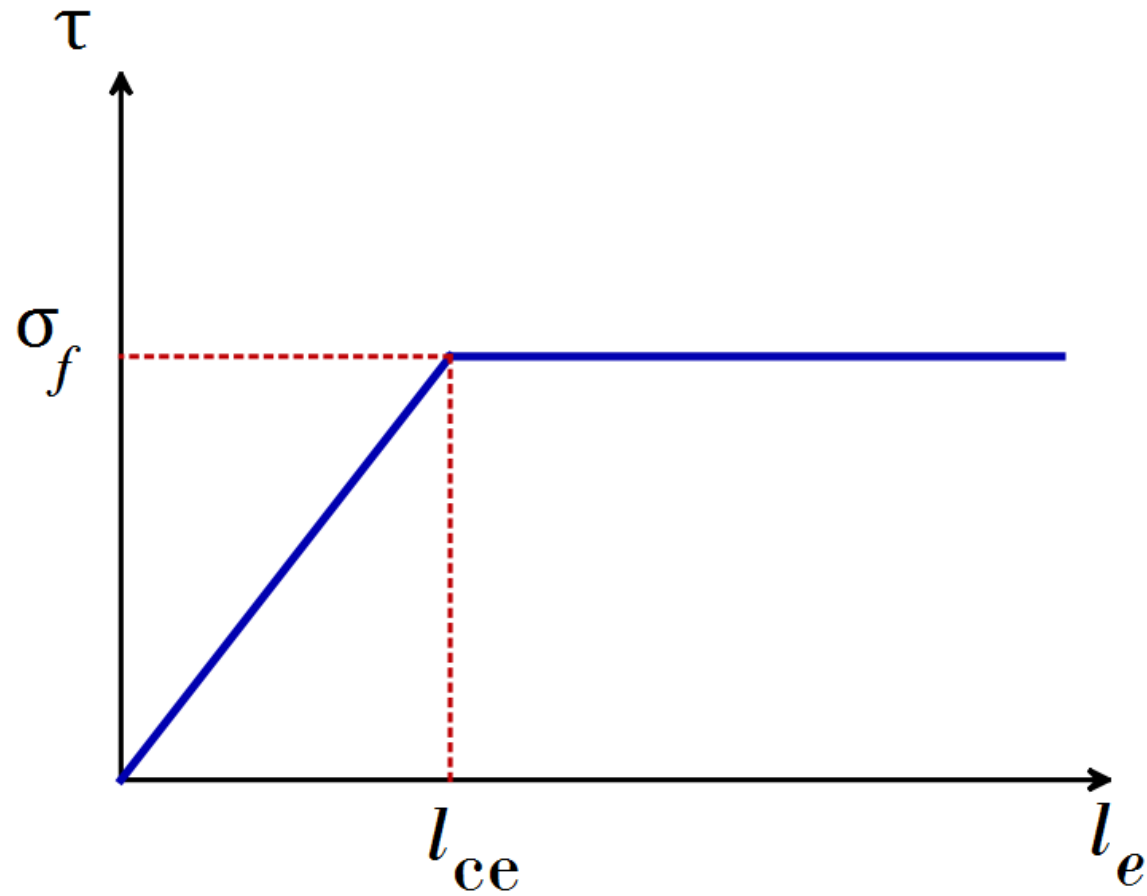
در نواحی که لیف و ماتریس تماس دارند یک تنش برشی ایجاد می شود که اگر استحکام لیف بیشتر از استحکام برشی سطح مشترک باشد، لیف خارج شده و در غیر اینصورت لیف شکسته می شود.

در حالتی که تعادل میان تنش بیرون کشیدن لیف و استحکام برشی سطح مشترک برقرار شود خواهیم داشت:



$$\sigma \pi r^2 = 2 \pi r l_e \tau$$

$$\frac{l_e}{r} = \frac{\sigma}{2\tau}$$



طول جایگذاری شده بحرانی

این درگیری بین لیف و ماتریس در الیاف کوتاه حائز اهمیت می شود. پس اگر طول جایگذاری لیف از مقدار بحرانی کمتر باشد سبب بیرون کشیده شدن لیف می شود و چنان چه طول جایگذاری لیف از این مقدار بحرانی بیشتر گردد، سبب بیرون کشیده شدن لیف نمی شود و در نهایت به شکست لیف منجر می شود.



می توان interface را تغییر داد و چسبندگی خوب یا بد ایجاد کرد. وقتی که تنش کششی مورد نیاز برای شکستن پیوند بر حسب طول جایگذاری شده رسم شود، یک کاهش شدید ناشی از شکست لیف قبل از جداسازی لیف وجود دارد. این طول به نام طول بحرانی جایگزین شده معروف است و وابسته استحکام پیوند میان لیف و ماتریس است.

اگر σ به $l_e \leftarrow \sigma_f^*$ به l_c تغییر پیدا می کند. σ_f^* استحکام شکست لیف است.

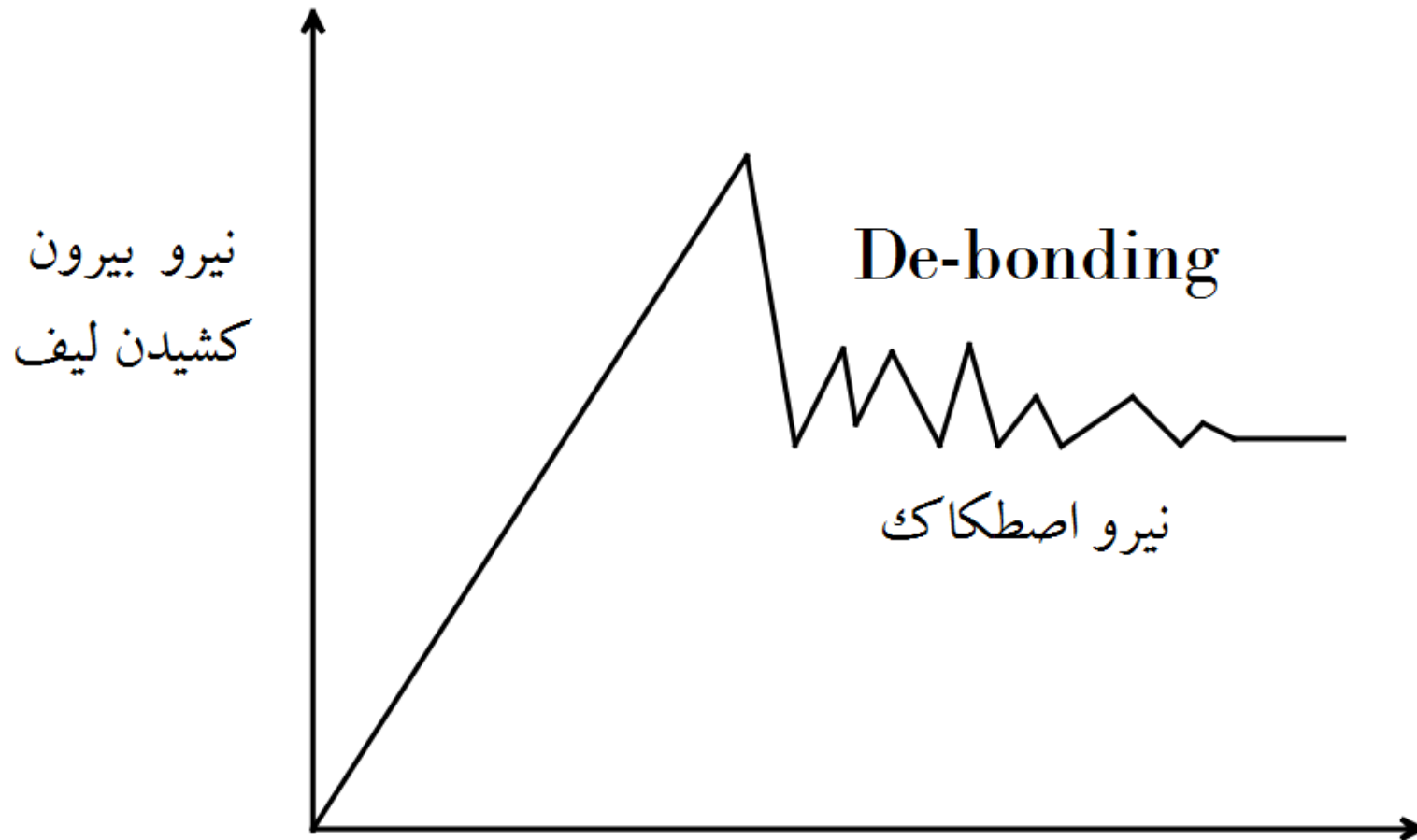
$$l_{ce} = \frac{\sigma_f^* r}{2\tau}$$

مطالعات نشان داده که بعد از جدایش لیف از ماتریس، لیف به راحتی بیرون کشیده نمی شود و به صفر نمی رسد چون نیروهای اصطکاکی وجود دارند و به راحتی لیف از داخل ماتریس خارج نمی شود چرا که اصطکاک وجود دارد.



اگر یک لیف را داخل قالب پلیمر قرار دهیم:

در این حالت یعنی وقتی ضربه به کامپوزیت می خورد، De-bonding رخ می دهد اما لیف به راحتی بیرون نمی آید و انرژی استفاده می کند.





جایی که نیروی اصطکاک وجود دارد چون لیف در برابر بیرون کشیده شدن مقاومت می کند جذب انرژی صورت می گیرد که این نیروها به تنش باقی مانده (Residual stress) ربط می دهند که به چند دلیل اتفاق می افتد:

۱. آب رفتگی رزین در اثر حرارت (در طول پخت)

۲. انقباض حرارتی تفاضلی

۳. هنگامی که De-bonding در لیف انجام می شود در لیف یک افزایش قطر که ناشی از انبساط پواسونی است، شکل می گیرد.

این شکست بستگی به کار دارد که بخشی از کار، جذب انرژی و بخشی جدایش است.

آیا روی لیف تنش به صورت یکسان اعمال می شود یا خیر؟ ابتدا باید بحث و بررسی نمود که توزیع تنش داریم یا تنش ثابت است.

قبل از اینکه مقدار کار مورد نیاز را برای بیرون کشیدن لیف، مورد بررسی قرار دهیم، نیاز است که در رابطه با توزیع تنش در طول لیف بعد از De-bonding، بحث انجام شود.

De-bonding از بالاترین تنشی که به لیف وارد می شود، شروع می شود. حال بالاترین تنش برشی بر روی انتهای لیف اعمال می شود، پس De-bonding از این نقطه (انتهای لیف) شروع شده و تنش در طول لیف پخش می شود. در اینجا انتقال بار از ماتریس به لیف توسط نیروهای اصطکاکی انجام می شود.

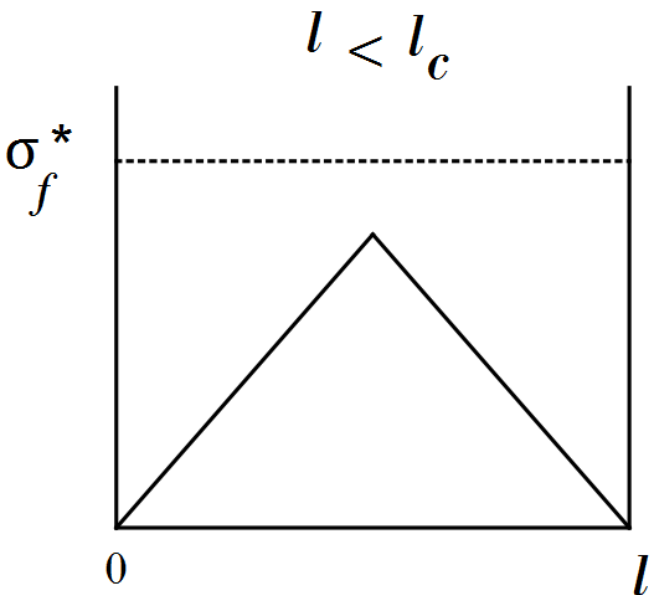
اگر بخواهیم یک آنالیز انجام دهیم، می توان نوشت:

$$\pi r^2 d\sigma = 2\pi r \tau_{fric} dx$$

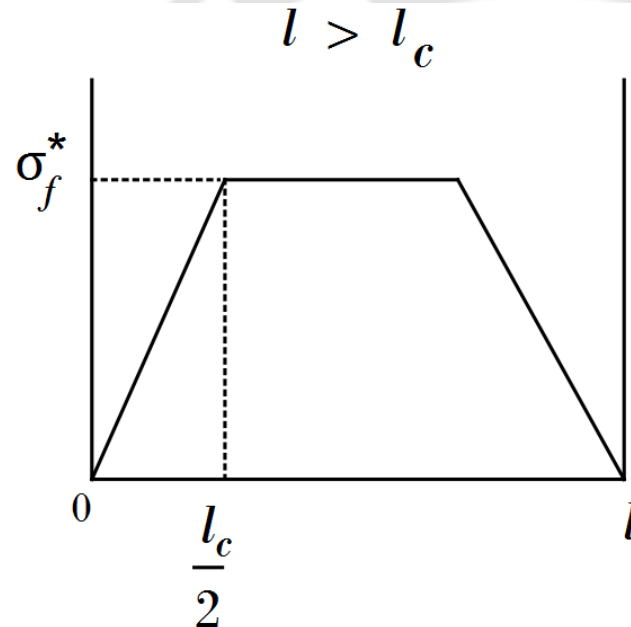
$$\frac{d\sigma}{dx} = 2 \frac{\tau_{fric}}{r}$$

τ_{fric} : تنش اصطکاکی در سطح مشترک لیف و ماتریس

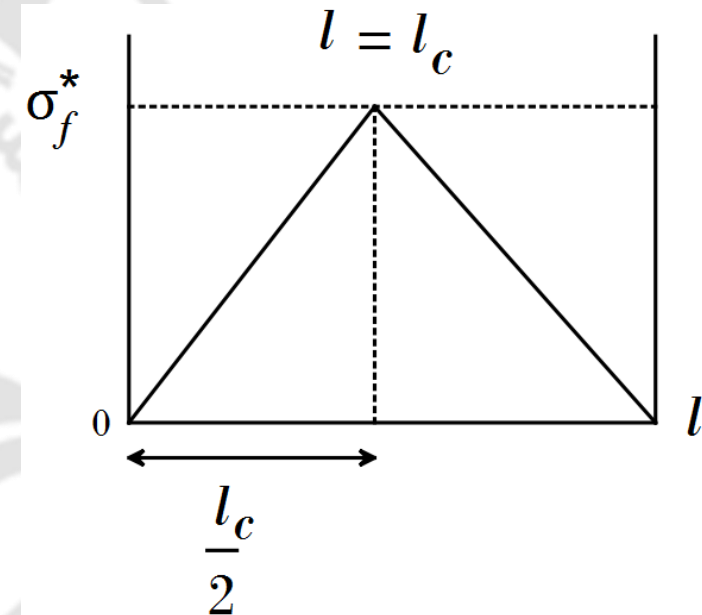
اگر بخواهیم تنش در لیف را بر حسب طول بررسی کنیم (چندین حالت داریم):



لیف بیرون کشیده می شود
(Fiber pull out)



در این حالت مقدار تنشی که
لیف تحمل می کند زیاد است
اما در نهایت لیف می شکند
(Fiber breakage).

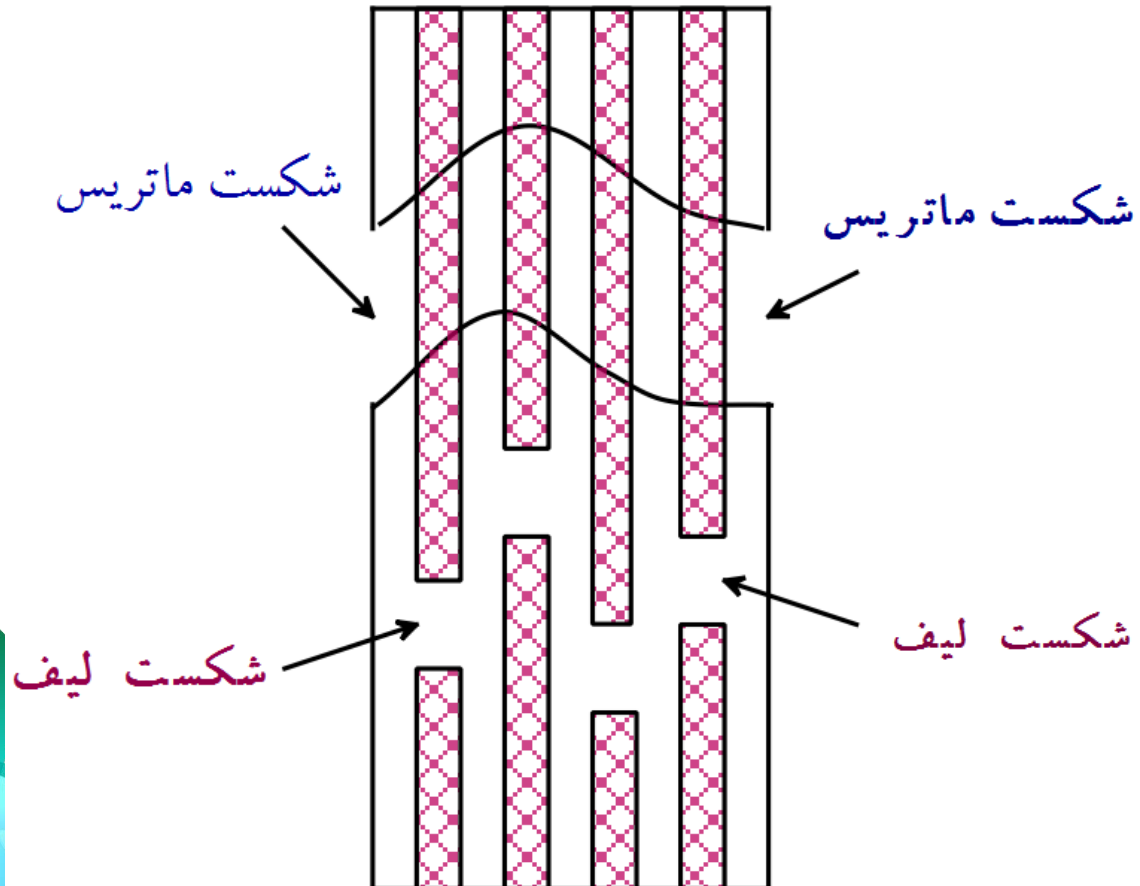


در این حالت شکست الیاف
(Fiber breakage) رخ می دهد.

می خواهیم سهم De-bonding و نیروی اصطکاک را تعیین کنیم:

وقتی یک لیف را می خواهیم بیرون بکشیم، دو سهم De-bonding و اصطکاک وجود دارد. در شکل زیر ماتریس دچار شکست شده است. کامپوزیت را تحت تنش قرار داده ایم که ماتریس ترک خورده و چار شکست شده است ولی لیف پل زده و انتقال بار را بین دو بخش ماتریس انجام داده است ولی خود لیف هم در محل هایی شکسته شده است.

فرض کنید:



لیف که پل زده است ، آیا این طول لیف از طول بحرانی کمتر یا بیشتر است؟

اگر از طول بحرانی کمتر باشد: $l < l_c$

Pull out رخ می دهد.

اگر از طول بحرانی بیشتر باشد: $l > l_c$

بار را تحمل کرده و قدرت بالایی از خود نشان می دهد.

اگر برابر با طول بحرانی باشد: $l = l_c$

لیف پل می زند و بار را بر میدارد و انتقال بار به لیف انجام می شود.

بنابراین از روی سطح طول بیرون زدگی لیف می توان چسبندگی خوب یا بد را تشخیص داد. اگر سطح لیف صاف باشد چسبندگی کم را نشان می دهد ولی اگر سطح شکست لیف زبر باشد یعنی چسبندگی بالا بوده و لیف مقاومت کرده تا در نهایت شکسته شده است.



می توان با عکس برداری میکروسکوپی و بررسی کردن سطح لیف و سطح شکست لیف می توان خوب یا بد بودن چسبندگی را بررسی نمود. مثلا اگر ذرات ماتریس روی لیف باقی مانده باشد و یا سطح لیف صاف یا زبر باشد یعنی چسبندگی بالا بوده است.

برخی از افراد بر روی طول بیرون زده ی لیف، آنالیز انجام دادند که بسیاری از مسائل را مشخص می کند.

❖ می خواهیم یک معیار به دست آوریم:

اولین کسی که روی این کار مطالعه کرده و آنالیز شکست انجام داده است Kelly در سال ۱۹۷۰ بوده است که می گوید ۳ سهم وجود دارد:

۱. سهم کمی از انرژی شکست رزین و الیاف ترد (یعنی هر دو ترد باشند Brittle)

۲. انرژی De-bonding (جداشدن لیف) که برای یک تک لیف نوشته است:

$$W_D = \frac{1}{6} \pi r^2 \left(\frac{\sigma_f^*}{E_f} \right) \sigma_f^* x$$

De-bonding بر روی طول x انجام شده است.

$$W_p = \pi r x^2 \tau$$

گفتیم:

$$l_{ce} = \frac{\sigma_f^* r}{2\tau}$$

Max انرژی وقتی به دست می آید که $x = l_{ce}$ (طول بیرون کشیدگی لیف)

از جایگذاری رابطه l_{ce} در رابطه انرژی بیرون کشیدن خواهیم داشت:

$$W_c = \pi r \left(\frac{\sigma_f^* r}{2\tau} \right) x \tau \rightarrow W_c = \frac{1}{2} \pi r^2 \sigma_f^* x$$



نسبت max کار انجام گرفته در بیرون کشیدن لیف به کار انجام شده در De-bonding به صورت زیر است:

$$\frac{W_C}{W_D} = \frac{3E_f}{\sigma_f^*}$$

از نتایج به دست آمده می توان گفت که بیرون کشیده شدن لیف به عنوان جذب انرژی بسیار مهم تر از De-bonding مطرح است. در هر حال می توان گفت که De-bonding باید قبل از Pull out صورت بگیرد.

اگر تنش برشی برای De-bonding بزرگ باشد، شکست لیف اتفاق می افتد. قبل از De-bonding مقدار pull out بسیار کم می شود به عبارت دیگر شکست ترد، جذب انرژی ندارد.

▪ اگر انرژی **De-bonding** > انرژی **pull out** باشد ← جذب انرژی زیاد می شود چون در pull out اصطکاک ایجاد می شود.

▪ اگر انرژی **De-bonding** < انرژی **pull out** باشد ← قبل از De-bonding شکست لیف اتفاق می افتد.

چه زمانی لیف شکسته می شود و په زمانی لیف خارج می شود؟ بستگی به طول جایگذاری شده دارد.

انرژی pull out خواص ضربه پذیری را بهبود می بخشد و انرژی De-bonding خواص کششی را بهبود می بخشد.

اگر هر دو ویژگی را بخواهند، به صورت random چسبندگی خوب و بد ایجاد می کنند و چسبندگی را بالا و پایین می کنند. به عبارت دیگر الیاف را به صورت بگیر و نگیر در کنار هم قرار می دهند.

یک کامپوزیت شامل ۵۰٪ حجمی الیاف پیوسته می باشد که به طور تک جهته آرایش دارد. این الیاف از نوع کربن با استحکام بالاست و رزین اپوکسی به عنوان ماتریس مورد استفاده قرار می گیرد. مطلوب است محاسبه استحکام کششی موازی با الیاف؟

اطلاعات مورد نیاز:

استحکام کششی الیاف: 3200 MPa

استحکام کششی اپوکسی: 60 MPa

مدول کششی الیاف: 230 GPa

مدول کششی اپوکسی: 2.4 GPa

یک کامپوزیت شامل ۵۰٪ حجمی الیاف پیوسته می باشد و به صورت تک جهت آرایش یافته است. نوع الیاف شیشه E و ماتریس پلی استر است. مطلوب است محاسبه استحکام کششی در جهت الیاف؟ اطلاعات مورد نیاز:

استحکام کششی الیاف: 1800 MPa

استحکام کششی پلی استر: 55 MPa

مدول کششی الیاف: 76 GPa

مدول کششی پلی استر: 3 GPa



تا اینجا یک آنالیز از استحکام طولی انجام شده است. باید یک آنالیز از استحکام عرضی انجام داد که استحکام عرضی بسیار پیچیده و بسیار متفاوت از استحکام طولی است.

□ استحکام عرضی:

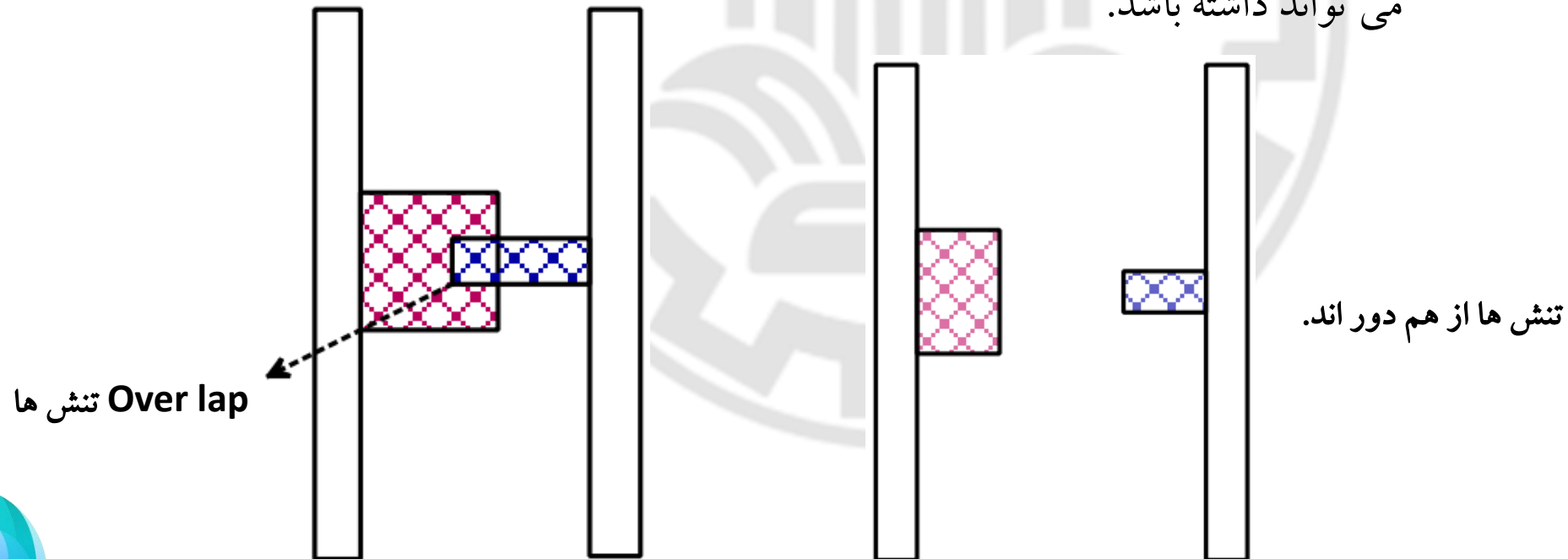
میکرومکانیک شکست عرضی:

اگر یک کامپوزیتی داشته باشیم که در طول به آن نیروی σ_1 وارد شود، استحکام طولی ایجاد می شود و چون لیف در گیر است E_1 نیز افزایش می یابد.

اگر σ_2 وارد کنیم، E_2 افزایش پیدا می کند اما نه در حد E_1 ولی در v_f های بالا، E_2 بالا حاصل می شود. به دلیل وجود σ_2 یک تمرکز تنش در جسم ایجاد می شود و ماتریس دیکته کننده خواص می شود (خواص عرضی). به دلیل وجود الیاف قرار گرفته در ماتریس، تمرکز تنش اتفاق می افتد. استحکام شروع موضعی دارد و از تقاطع ضعیف شروع می شود این بیشترین ضعف به دلیل عیوب، نواقص و ... است. این ضعف ها ممکن است $Crack$ ، $Void$ ، $Craze$ ، ضعف $De-bonding$ و ... باشد و ممکن است از بیشترین تنش در مواد شروع شود یعنی از یک تمرکز تنش عیوب.

ما می خواهیم بیان کنیم که شروع استحکام از ضعف هاست که در اثر تمرکز تنش (stress concentration) به وجود می آید. در اثر تفاوت در سرد و گرم شدن ۲ جزء در کامپوزیت، پرس لیف، ... ممکن است این تمرکز تنش رخ دهد و حتی در الیاف کوتاه از مباحث تمرکز جریان، منشا جریانی یا حرارتی این تمرکزها شکل بگیرد. پس شرایط موضعی مواد دیکته کننده رفتار و باعث شکست اند. این ناپیوستگی می تواند در حد میکروسکوپی و یا ماکروسکوپی باشد.

تمرکز تنش در نزدیک لیف بیشتر است. اگر تنش ها از لیف به سمت جلو حرکت کند و مکان الیاف به گونه ای باشد که روی هم Over lap اتفاق بیوفتد، این تنش ها راه حل های پیچیده و یا مساوی می تواند داشته باشد.





شخصی به نام Gaodrei یک آنالیز انجام داده است، شکل اول نشان می دهد یک کامپوزیت حاوی یک لیف است، گودیر تنش های وارد بر لیف را بررسی کرده است. فواصل شعاعی را به ترتیب افزایش داده و بر a تقسیم کرده است و تنش های σ_r و σ_θ را در جهت اعمال شده ی مماسی و شعاعی در نظر گرفته است.

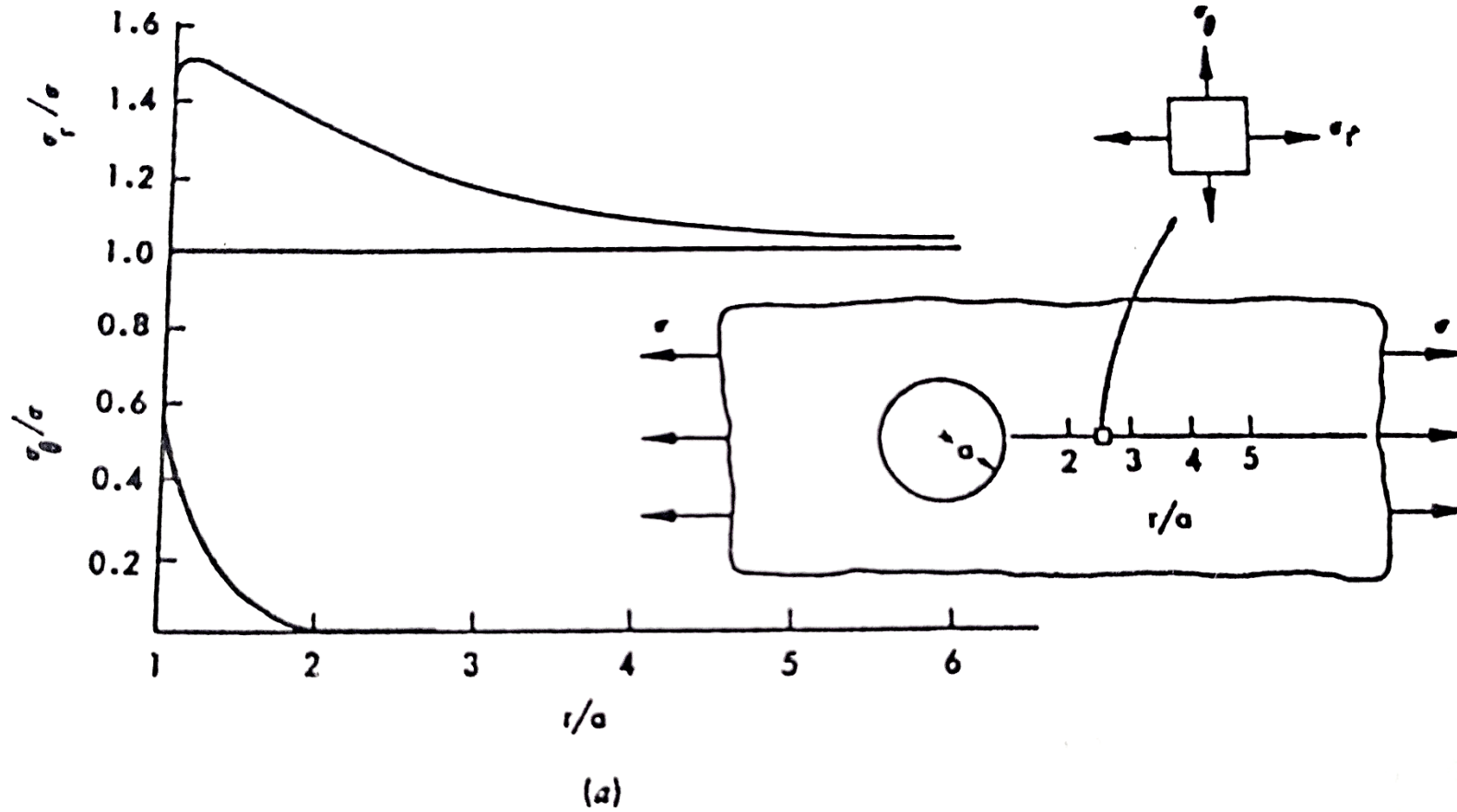
σ_r : تنش شعاعی

σ_θ : تنش تانژانتی یا تنش مماسی

روابط تنش های شعاعی و تانژانتی را با فاصله گرفتن از لیف به دست آورده است. در حالت شعاعی

نمودار نشان می دهد زمانی که $\frac{r}{a} = 1$ است $\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = 1.5$ و زمانی که $\frac{r}{a} = 6$ می شود، $\frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} = 1$

می شود یعنی یک تمرکز تنش در نزدیک لیف ایجاد شده و تا ۶ برابر شعاع آن، این تنش صفر می شود و نسبت تنش یک می شود.





در حالت تانژانت $\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma} = 0.6$ است و با افزایش $\frac{r}{a} = 2$ تنش تانژانتی حذف می شود. از این رو می توان برداشت کرد که یک جسم خارجی باعث ایجاد تمرکز تنش در ماتریس می شود. در این حالت یک ضریب تعریف می شود.

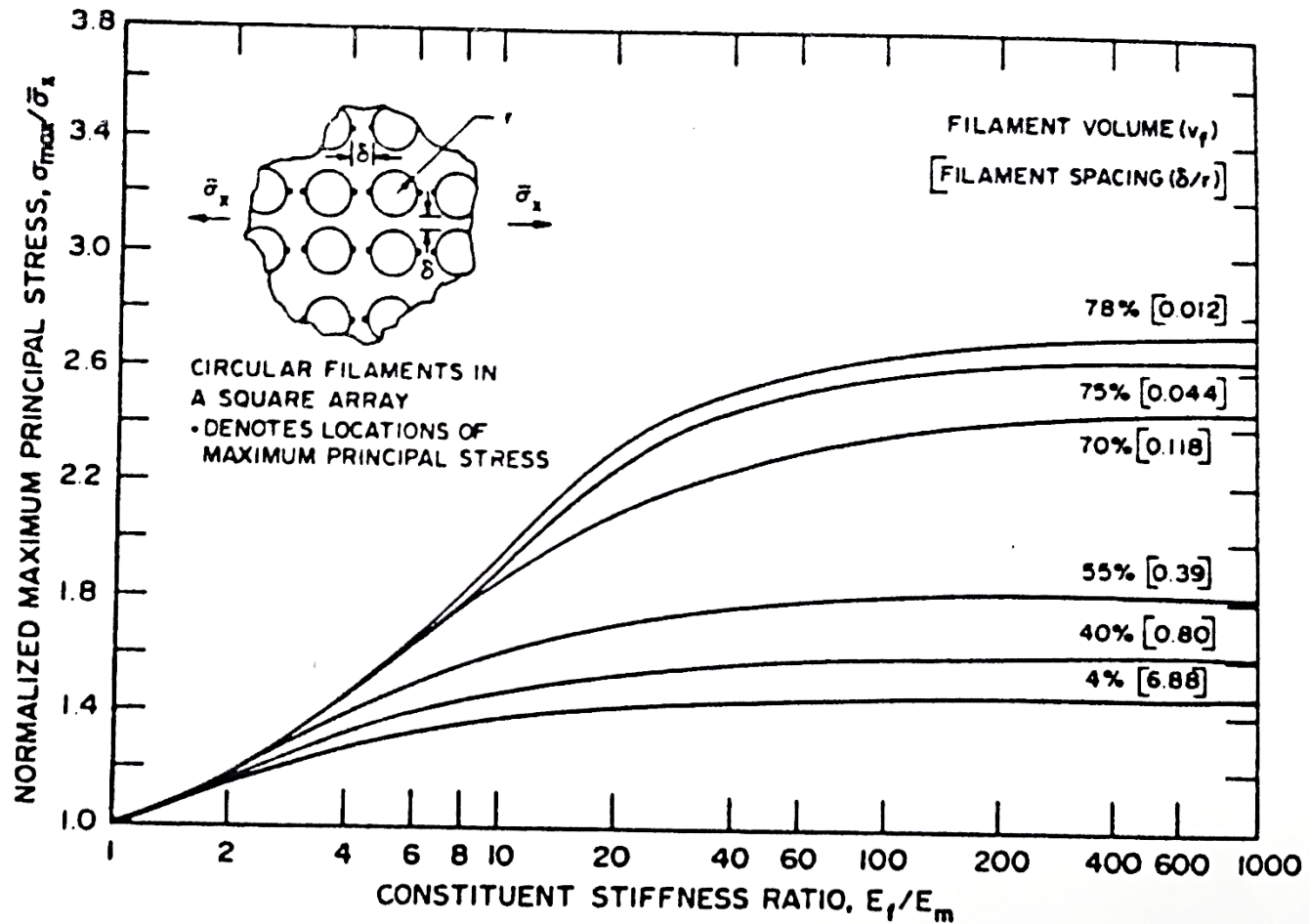
فاکتور تمرکز تنش: Stress Concentration Factor

نسبت max تنش درونی به تنش اعمال شده، فاکتور تمرکز تنش نامیده می شود.

اثر این تمرکز تنش با فاصله تغییر می کند. عوامل موثر بر این تمرکز: ۱. کسر حجمی الیاف ۲. خواص الاستیک-پلاستیک ماتریس و لیف (چقدر از نظر خواص بهم نزدیک اند: هر چه بیشتر به هم نزدیک باشند، تمرکز تنش کمتر است)

آنالیزهای انجام شده بسیار شدید و عددی سات و سخت می باشد. شخصی max تنش را بررسی کرده است. چون $\frac{E_f}{E_m}$ مشخص است و کسر حجمی الیاف را وارد رابطه کرده است.

الیاف مدور در آرایش مربع را در نظر گرفته است. بالاترین تمرکز تنش در نزدیک سطح لیف است.



(b)

Figure 3.12. (a) Stress distributions in matrix surrounding single cylindrical inclusion: $E_f/E_m = 10$, $\nu_m = 0.35$, $\nu_f = 0.30$; (b) normalized principal stress in matrix surrounding multiple fibers: $\nu_m = 0.35$, $\nu_f = 0.20$.

نکته: یکی از پارامترهای مهم، کسر حجمی الیاف برای تمرکز تنش است.

نتیجه: هرچه کسر حجمی کمتر شده، تمرکز تنش نیز کمتر می شود یعنی در کسر حجمی های بالاتر، تمرکز تنش های بیشتر ایجاد می شود، استحکام کمتر شده و همچنین هموژن بودن نیز کاهش می یابد.

وقتی می خواهیم استحکام عرضی را تعریف کنیم بایستی فاکتور تمرکز تنش را تعریف کرد.

□ استحکام عرضی σ_2 :

استحکام عرضی یک کامپوزیت را می‌توان به روش‌های مختلف پیش‌بینی کرد، مانند روش‌های مقاومت مصالح یا الاستیسیته پیشرفته. استحکام عرضی σ_2 را به صورت σ_{TU} (Transfer Ultimate) و σ_{\perp} نیز نشان می‌دهند.

فرض می‌کنیم استحکام کامپوزیت به اندازه‌ی یک فاکتور (S) که به ضریب کاهش مقاومت معروف شده، کمتر از استحکام ماتریس است.

ضریب کاهش مقاومت (strength – reduction factor) به پارامترهای مختلفی مانند ۱. کسر حجمی الیاف و ۲. خواص الاستی-پلاستیک لیف و ماتریس است.

خواص عرضی کامپوزیت، توسط استحکام عرضی ماتریس دیکته می‌شود.



بایستی فاکتور (S) را به روش های مختلف ارزیابی کرد:

۱. از روش مقاومت مصالح:

از طریق ۲ ضریب می توان (S) را تعریف کرد:

▪ ضریب تجمع تنش (SCF) Stress Concentration Factor

$$\varepsilon_2^* = \frac{\varepsilon_m^*}{SMF}$$

▪ ضریب افزایش کرنش (SMF) Strain-Magnification Factor

$$\sigma_2^* = \frac{\sigma_m^*}{SCF}$$



از مدل های ریاضی استفاده کرده اند و به شرطی که نسبت پواسون آنها خیلی زیاد نباشد خواهیم داشت:

$$SCF = \frac{1 - \nu_f \left[1 - \left(\frac{E_m}{E_f} \right) \right]}{1 - \left(\frac{4\nu_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{E_m}{E_f} \right) \right]}$$

$$SMF = \frac{1}{1 - \left(\frac{4\nu_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{E_m}{E_f} \right) \right]}$$

با دانستن اطلاعات لیف، ماتریس و کسر حجمی الیاف و آرایش الیاف در ماتریس می توان به استحکام عرضی دست یافت. در این حالت یک ضریب کاهش دگی به دست می آوریم (SCF و SMF) و استحکام عرضی که از ماتریس هم کمتر است، حاصل می شود. استحکام عرضی روی سفتی بیشتر مانور می دهد.



در روش های پیشرفته فاکتور S را از دانش کامل حالت تنش و کرنش در کامپوزیت محاسبه می شود. شکست ماتریس را باید از معیار شکست مناسب به دست آورد. معیار ماکزیمم انرژی اعوجاج است که به صورت U_{max} نشان می دهند:

$$U_{max} = \text{Maximum distortion energy}$$

که ضریب کاهش مقاومت را (S) به صورت زیر تعریف کرده اند:

$$S = \frac{(U_{max})^{\frac{1}{2}}}{\sigma_c}$$

تنش اعمال شده در کامپوزیت

پارامترهایی مانند کسر حجمی الیاف، طرز قرار گرفتن الیاف نسبت به هم یا فشردگی Compactness، شرایط در سطح مشترک لیف و ماتریس، خواص اجزای تشکیل دهنده بر U تاثیر گذارند.



یک راه حل دیگر برای محاسبه استحکام عرضی، عملی است که توسط نیلسون Nielsen انجام شده است: این آنالیز شبیه کامپوزیت ذره ای است.

$$\epsilon_m^* = \frac{\sigma_m^*}{E_m}$$

$$\sigma_2^* = E_2 \epsilon_2^*$$

$$\epsilon_2^* = \epsilon_m^* \left(1 - v_f \frac{1}{3}\right)$$

می توان نوشت:

$$\epsilon_2^* = \frac{\sigma_m^*}{E_m} \left(1 - v_f \frac{1}{3}\right) \rightarrow \sigma_2^* = \sigma_m^* \frac{E_2}{E_m} \left(1 - v_f \frac{1}{3}\right)$$

در حالت کششی و برشی هم می توان مبحث را جلو برد. البته تئوری های دیگر هم هست که ما وارد آنها نمی شویم.

روش استفاده شده برای محاسبه استحکام کششی را نمی توان برای استحکام پرسی طولی استفاده نمود چرا که نوع شکست در بارگذاری پرسی متفاوت است و در شکل نشان داده شده است.

شکل ۱ نشان می دهد کرنش لیف 0.025 و کرنش ماتریس 0.020 است بنابراین ماتریس شکننده تر (ترد تر) است. ابتدا ماتریس شکسته و پس از آن ماتریس ترک ترکی شده است.

در شکل ۲ ابتدا لیف شکسته و پس از آن ماتریس تحمل نکرده و شکسته شده است (لیف ترد تر).

در شکل ۳ لیف شکسته شده و انتقال بار از یک طرف به طرف دیگر از طریق تنش برشی اتفاق می افتد.

تنش برشی در اثر تفاوت کرنش در لیف و ماتریس ایجاد می شود. رد اینجا شکست از طریق De-bonding و Interface crack انجام شده است.

در شکل ۴ لیف پرسی می شود و کامپوزیت در اثر پرسی نشان داده شده است.

شکل ۵ حالت برشی را نشان می دهد که از روی نمودار قابل تشخیص است. اگر کسر حجمی از مقداری بیشتر شود، حالت برشی ایجاد می شود.

شکل ۶ به صورت نموداری برای کسر حجمی های مختلف فاکتور کاهش دگی را نشان می دهد.



- Critical V_f is rather low in polymer composites:

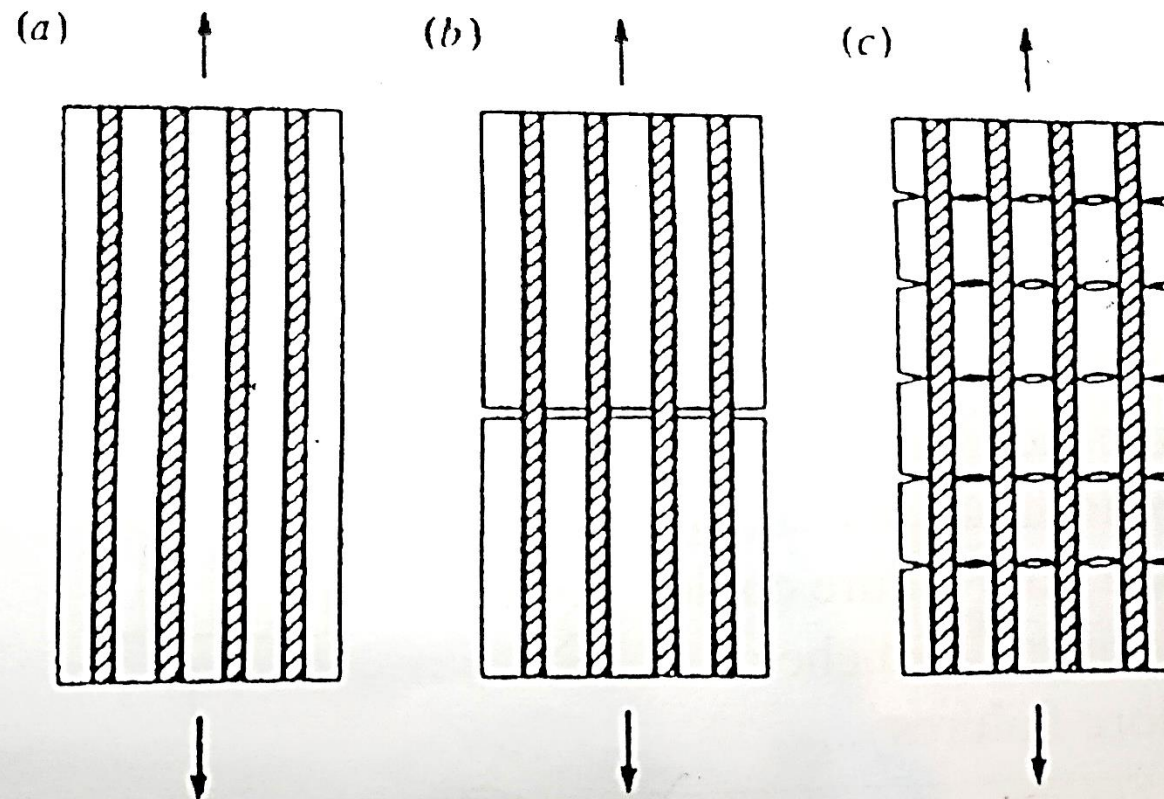
example:

glass fibre: $\varepsilon_f^* = 0.025$

polyester: $\varepsilon_m^* = 0.020$

critical $V_f' = 0.11$

Failure mode:
multiple cracks in matrix



شکل ۱

- Critical V_f is very low in polymer composites:

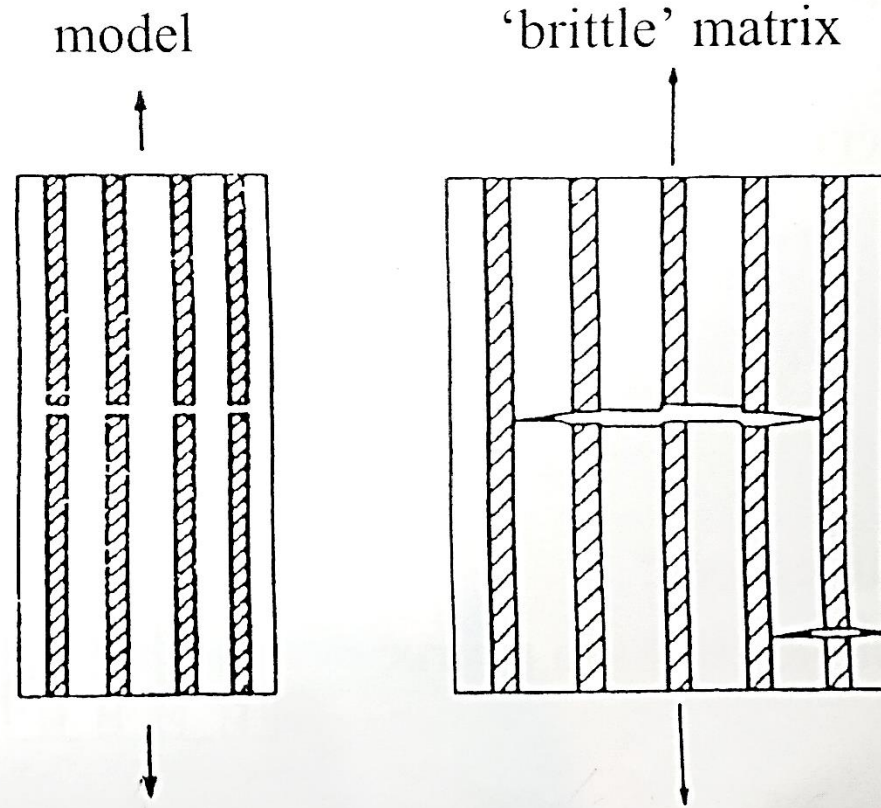
example:

carbon fibre: $\varepsilon_f^* = 0.010$

epoxy: $\varepsilon_m^* = 0.020$

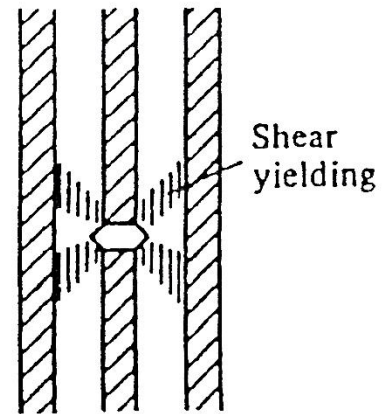
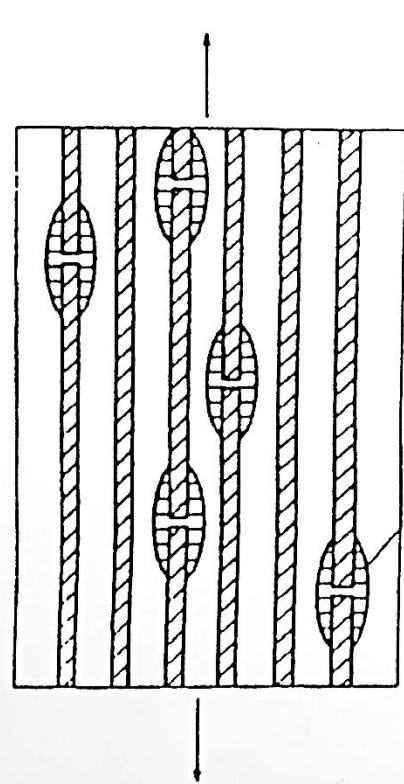
critical $V_f' = 0.026$

Failure mode: stress concentration around one fibre failure could initiate avalanche of fibre failures ...

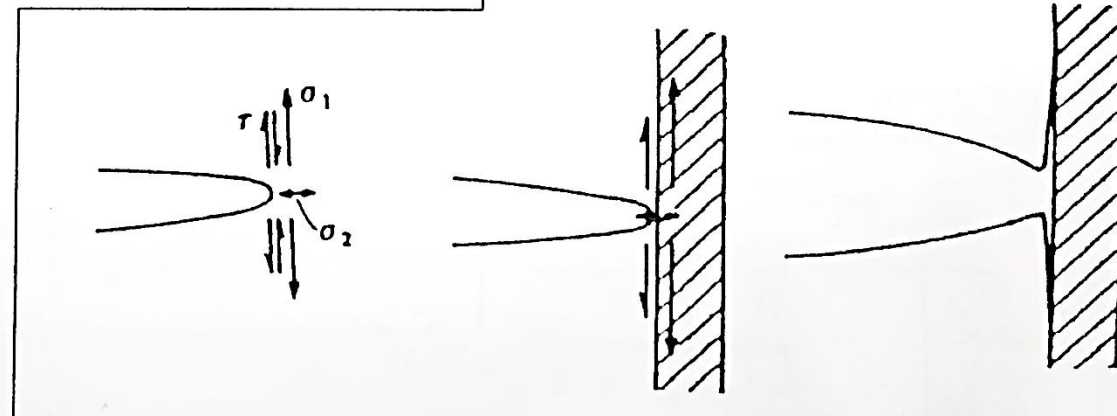
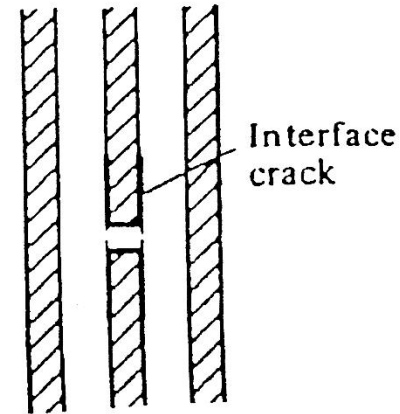


شکل ۲

- Effect of early fibre fracture can be reduced by
 - shear yielding

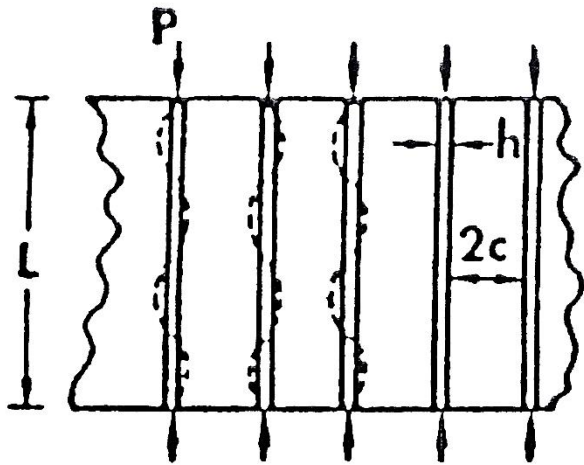


interface cracking



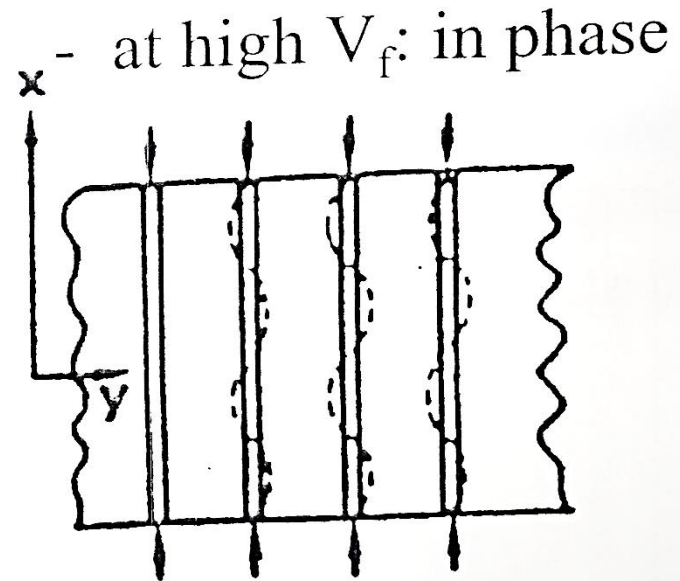
شکل ۳

- Controlled by buckling of fibres, supported by 'soft' matrix
- two buckling modes:
 - at low V_f : antiphase



"EXTENSION" MODE

$$\sigma_{11,c} = 2 \cdot v_f \cdot \left[\frac{V_f \cdot E_m \cdot E_f}{3 \cdot (1 - V_f)} \right]^{1/2} = \frac{2 \cdot V_f^{3/2}}{\sqrt{3 \cdot (1 - V_f)}} \cdot \sqrt{E_m \cdot E_f}$$

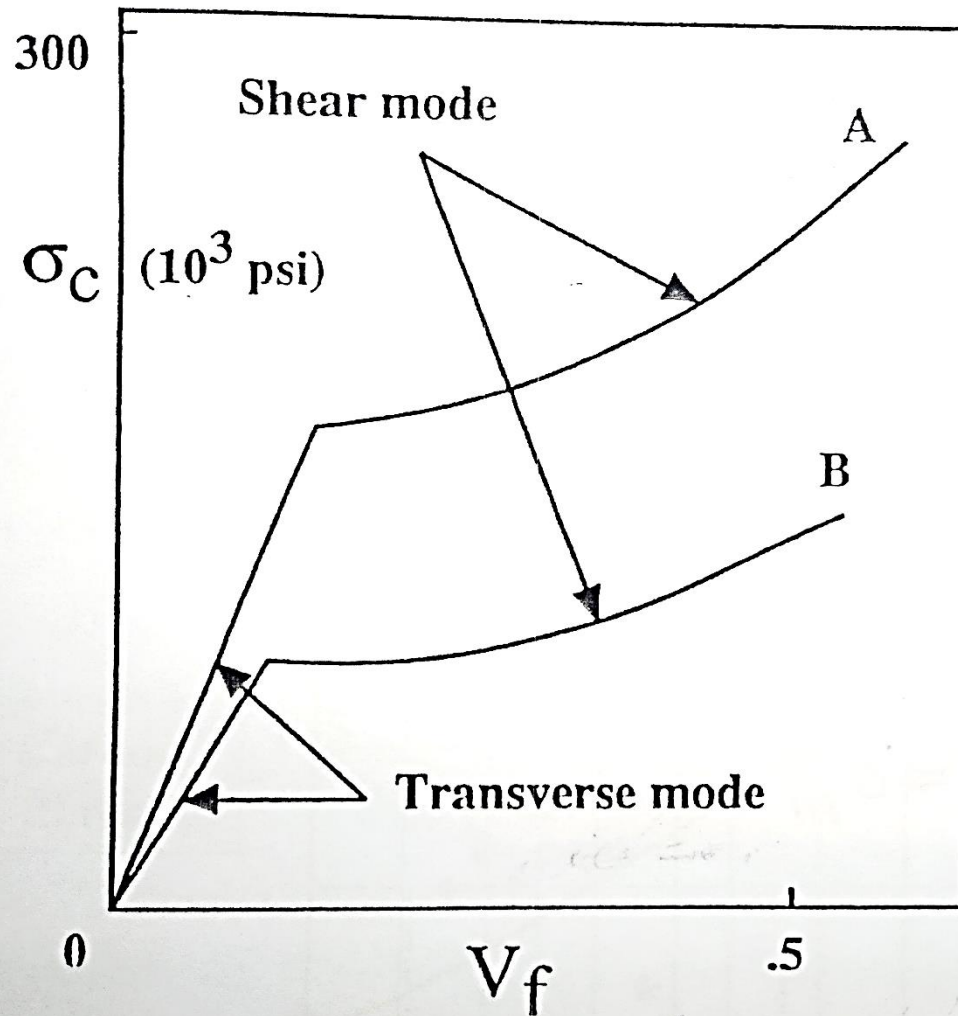


"SHEAR" MODE

$$\sigma_c = \frac{G_m}{1 - V_f}$$

شکل ۴

- example



A: BP 907 MATRIX
 $E_m = 500.000$ psi
 $G_m = 192.000$ psi

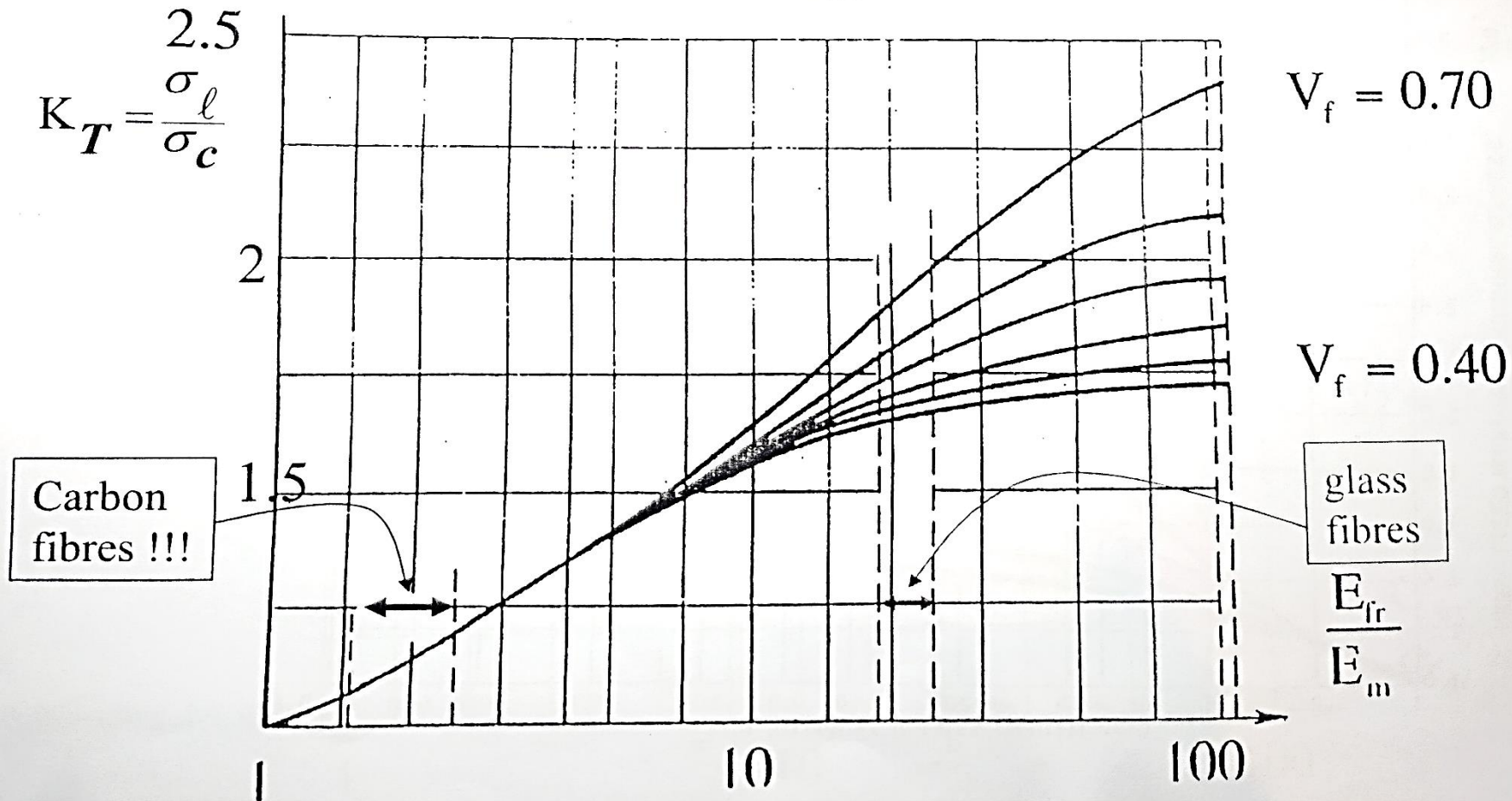
B: AF 126 MATRIX
 $E_m = 250.000$ psi
 $G_m = 96.000$ psi

شکل ۵



- is a function of
 - the fibre-to-matrix stiffness ratio E_f/E_m
 - the fibre volume fraction: overlapping stress fields at higher V_f

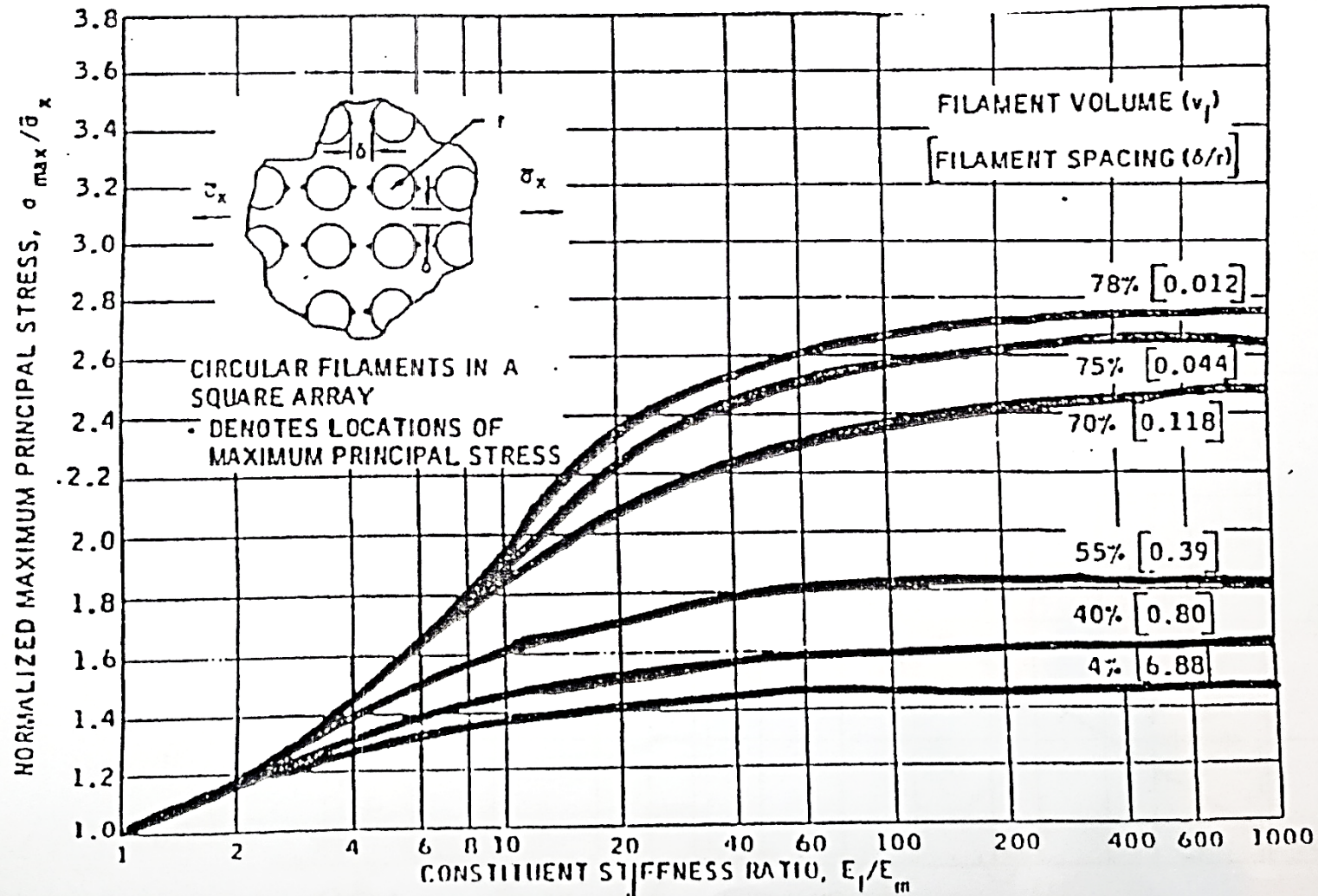
SKUDRA



شکل ۶

- Effect is even stronger for higher volume fractions!!!

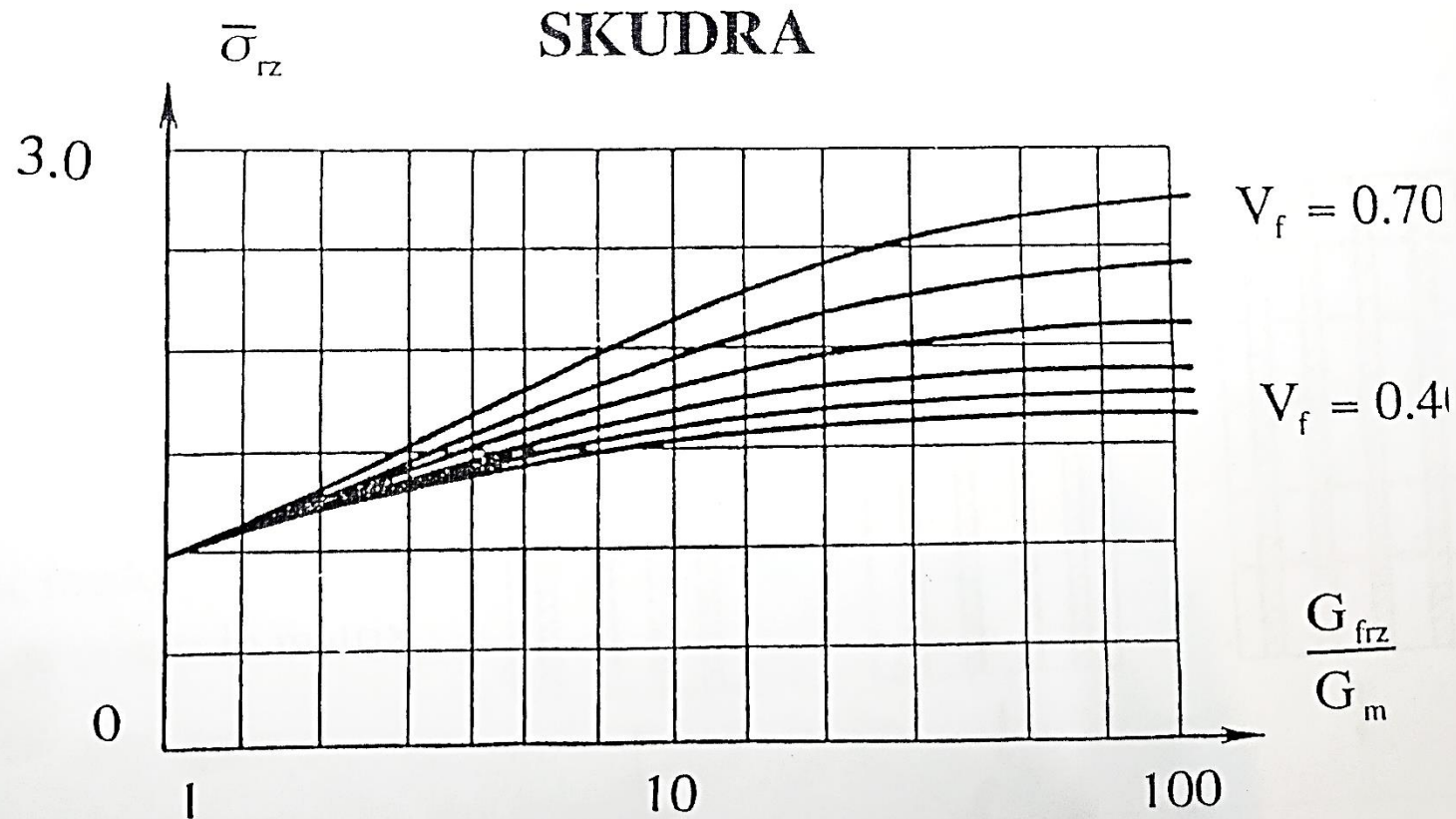
ADAMS



شکل ۷

Shear strength

- Same arguments: stress concentrations initiate early failure
 - at the interface ... or in the matrix near to the fibre
 - are higher than for transverse strength (at similar stiffness ratio)



شکل ۸



در اثر بارگذاری پرسی می توان ۳ نوع شکست در کامپوزیت به دست آورد:

۱. شکست نتیجه کرنش کششی ایجاد شده در ماتریس با پیوند بین ماتریس و الیاف Extention mode
۲. شکست نتیجه ماکروباکلینگ یعنی میکروکمانش الیاف اتفاق افتد که می تواند کششی یا برشی باشد. یعنی لیف کمان کرده یا کشیده شده است.
۳. شکست نتیجه شکست برشی الیاف باشد یعنی لیف بشکند.



برای هر کدام از این شکست ها راه حل گفته اند:

در روش اول:

۱. شکست نتیجه کرنش کششی:

اگر تنش وارده بر الیاف در جهت طول آن باشد قدر مطلق کرنش پرسی عبارت اند از:

$$|\varepsilon_1| = \frac{|\sigma_1|}{E_1}$$

$$|\varepsilon_2| = \nu_{12} \frac{|\sigma_1|}{E_1}$$

با استفاده از تئوری ماکزیمم شکست کرنش: اگر کرنش عرضی بیش از کرنش نهایی کششی عرضی شود یعنی $(\sigma_1^c)_{ult}$ ، تک لایه در جهت عرضی شکسته می شوند، از این رو باید استحکام پرسی طولی را به کرنش عرضی نسبت دهیم:



$$(\sigma_1^c)_{ult} = \frac{E_1 (\varepsilon_2^T)_{ult}}{\nu_{12}}$$

این رابطه: استحکام پرسی طولی ناشی از شکست کرنش کششی
برای محاسبه E_1 می توان از روش الاستیسیته و با مقاومت مصالح و ... به دست آورد:

$$E_1 = E_f \nu_f + E_m \nu_m$$

$$\nu_{12} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m$$

$$(\varepsilon_2^T)_{ult} = (\varepsilon_m^T)_{ult} \left(1 - \nu_f \frac{1}{3}\right)$$



$$(\varepsilon_2^T)_{ult} = (\varepsilon_m^T)_{ult} \left[\frac{d}{s} \left(\frac{E_m}{E_f} - 1 \right) + 1 \right]$$

d: قطر الیاف

s: فاصله مرکز تا مرکز الیاف

$(\varepsilon_m^T)_{ult}$: کرنش ماتریس در حالت کشش تا شکست

در روش دوم:

۲. شکست نتیجه میکروکمانش باشد.

ممکن است برشی و یا کششی باشد. مدل های کمانش موضعی برای محاسبه استحکام پرسی طولی توسعه یافته است و موضوع گسترده ای می باشد، بنابراین فقط معادلات نهایی آورده می شود:



با استفاده از میکروسکوپ الکترونی به لیف نیرو وارد کرده و زیر میکروسکوپ نیروهای وارده بر الیاف مشاهده می شود.

$$(\sigma_1^c)_{ult} = \min [S_1^c \text{ و } S_2^c]$$

$$\textit{Extentional mode buckling stress} = S_1^c = 2 \left[\nu_f + (1 - \nu_f) \frac{E_m}{E_f} \right] \sqrt{\frac{\nu_f E_f E_m}{3(1 - \nu_f)}}$$

$$\textit{Shear mode buckling stress} = S_2^c = \frac{G_m}{(1 - \nu_f)}$$

به صورت کلی $S_1^c > S_2^c$ ، پارامتر S_1^c فقط در کامپوزیت های با کسر حجمی الیاف کم دیده می شود (ν_f کم).

۳. شکست تنش برشی الیاف:

یک تک لایه تک جهته می تواند به دلیل شکست برشی الیاف ، شکسته شود. در این صورت از قانون اختلاط استحکام برشی تک لایه استفاده می کنیم:

$$(\tau_{12})_{ult} = (\tau_f)_{ult} v_f + (\tau_m)_{ult} v_m$$

$(\tau_f)_{ult}$: استحکام برشی نهایی الیاف

$(\tau_m)_{ult}$: استحکام برشی نهایی ماتریس

Max تنش برشی در یک تک لایه تحت بارگذاری پرسی σ_1^c برابر است با $\frac{\sigma_1^c}{2}$ در زاویه 45° نسبت به محور الیاف.

$$(\tau_{12})_{ult} = \frac{\sigma_1^c}{2}$$

$$(\sigma_1^c)_{ult} = 2 \left[(\tau_f)_{ult} v_f + (\tau_m)_{ult} v_m \right]$$

در عمل تشخیص نوع شکست بسیار دشوار است و نتایج عملی اغلب با نتایج پیش بینی شده متفاوت است، چون تعدادی از پارامترهایی که باعث به وجود آمدن این تفاوت ها می شوند عبارتند از:

۱. عدم جایگذاری یکنواخت در ماتریس و ایجاد شکست در نواحی غنی از ماتریس
۲. عدم وجود پیوند بی عیب و نقص بین ماتریس و الیاف
۳. عدم جایگذاری دقیق الیاف
۴. اختلاف پواسون الیاف و ماتریس
۵. ماهیت غیر ایزوتروپ بودن بعضی از الیاف مانند آرامید و گرافیت.



مطلوب است محاسبه استحکام پرسی طولی یک تک لایه اپوکسی / الیاف شیشه با کسر حجمی الیاف ۷۰٪. فرض کنید الیاف دایره ای و در آرایش مربع قرار گرفته اند.



□ استحکام عرضی کشی: σ_2^T

تنش های باقی مانده نداشته باشد و کلیه فرض هایی که قبلا گفته شد. (پیوند بی عیب و نقص باشد، آرایش یکنواخت، الیاف و ماتریس از قانون هوک پیروی کنند.)

$$\delta_c = \delta_f + \delta_m$$

S : فاصله مرکز تا مرکز الیف

$$\delta_c = S \varepsilon_c$$

d : قطر الیف

$$\delta_f = d \varepsilon_f$$

$\delta_{c,f,m}$: تغییر شکل عرضی کامپوزیت الیف ماتریس

$$\delta_m = (S - d) \varepsilon_m$$

$\varepsilon_{c,f,m}$: کرنش

با استفاده از روش الایسیته و المان محدود استفاده شده نتیجه حاصل شد که:

$$\varepsilon_c = \frac{d}{S} \varepsilon_f + \left(1 - \frac{d}{S}\right) \varepsilon_m$$



در بارگذاری عرضی فرض بر آن است که حالت Isostress است: استرس لیف = ماتریس = کامپوزیت

$$E_f \varepsilon_f = E_m \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_c = \left[\frac{d}{S} \cdot \frac{E_m}{E_f} + \left(1 - \frac{d}{S} \right) \right] \varepsilon_m$$

فرض کنیم شکست انجام شده نتیجه شکست ماتریس است. (شکست عرضی تک لایه)

$$(\varepsilon_2^T)_{ult} = \left[\frac{d}{S} \cdot \frac{E_m}{E_f} + \left(1 - \frac{d}{S} \right) \right] (\varepsilon_m^T)_{ult}$$

$$(\sigma_2^T)_{ult} = E_2 (\varepsilon_2^T)_{ult}$$



مطلوب است محاسبه استحکام کشش نهایی عرضی کامپوزیت تک لایه تک جهت شیشه/اپوکسی با ۷۰٪ کسر حجمی الیاف. فرض کنید الیاف دایره ای با آرایش مربعی باشند. (استحکام پرسی آن با حالت یکسان است.)



معادله ی به دست آمده که برای استحکام کششی عرضی بود را می توان برای استحکام پرسی عرضی مورد استفاده قرار داد. این مقدار از استحکام نسبت به کششی کمتر خواهد بود. (بستگی به عیوب دارد).

$$(\varepsilon_2^c)_{ult} = \left[\frac{d}{S} \cdot \frac{E_m}{E_f} + \left(1 - \frac{d}{S} \right) \right] (\varepsilon_m^c)_{ult}$$

$$(\sigma_2^c)_{ult} = E_2 (\varepsilon_2^c)_{ult}$$

در این حالت کرنش ها پرسی یا کششی می شوند.

مثال:

مطلوب است محاسبه استحکام نهایی پرسی تک لایه ی تک جهتة اپوکسی / شیشه با ۷۰٪ کسر حجمی الیاف .

فرض : الیاف مدور در آرایش مربعی هستند .



با استفاده از روش مقاومت مصالح در اینجا تنش برشی صفحه ای که τ_{12} هدف را بدست می آوریم .

کرنش برشی صفحه ای کامپوزیت ، الیاف و ماتریس $(\gamma_{12})_{c,f,m}$

$$\Delta c = \Delta f + \Delta m$$

$$\Delta c = S(\gamma_{12})_c$$

$$\Delta f = d(\gamma_{12})_f$$

$$\Delta m = (s - d)(\gamma_{12})_m$$

و با فرض اینکه تنش برشی در ماتریس و الیاف یکسان باشد.

$$(\gamma_{12})_c = \frac{d}{S} (\gamma_{12})_f + \left(1 - \frac{d}{S}\right) (\gamma_{12})_m$$



$$(\gamma_{12})_m G_m = (\gamma_{12})_f G_f$$

Isostress

$$(\gamma_{12})_c = \left[\frac{d}{s} \frac{G_m}{G_f} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] (\gamma_{12})_m$$

فرض می کنیم شکست در ماتریس انجام گرفته است.

$$(\gamma_{12})_{ult} = \left[\frac{d}{s} \frac{G_m}{G_f} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] (\gamma_{12})_{m\,ult}$$

$$(\tau_{12})_{ult} = G_{12} (\gamma_{12})_{ult}$$

$$(\tau_{12})_{ult} = G_{12} \left[\frac{d}{s} \frac{G_m}{G_f} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] (\gamma_{12})_{m\,ult}$$

مطلوب است محاسبه استحکام نهایی برشی تک لایه تک جهته الیاف شیشه / اپوکسی با ۷۰٪ کسر حجمی الیاف. الیاف مدور با آرایش مربعی اند.

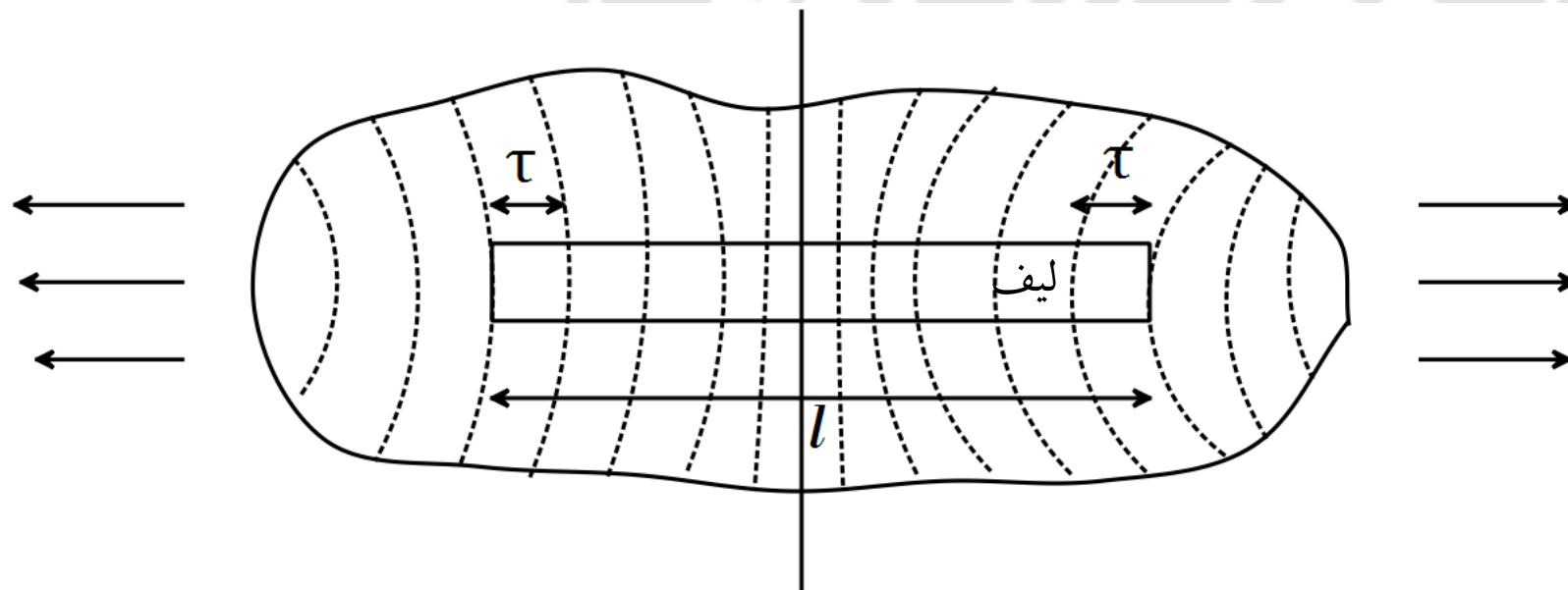


مکانیزم انتقال تنش به الیاف برای بررسی مبحث سطح مشترک گفته می شود.

□ مکانیزم انتقال تنش به الیاف

برای بررسی سفتی و استحکام کامپوزیت الیاف ناپیوسته مخصوصا انتهای ناپیوسته ها نیاز به دانش چگونگی انتقال تنش به الیاف می باشد. سفتی موجود در کامپوزیت ها ناشی از E_1 است. بنابراین باید بتوان خواص یا انتقال تنش از ماتریس به الیاف را مورد بررسی قرار داد.

قسمتی از یک جسم یا الیاف در یک ماتریس قرار می گیرد، انتقال تنش قاعدتا از طریق تنش های برشی در سطح مشترک به وجود می آید.





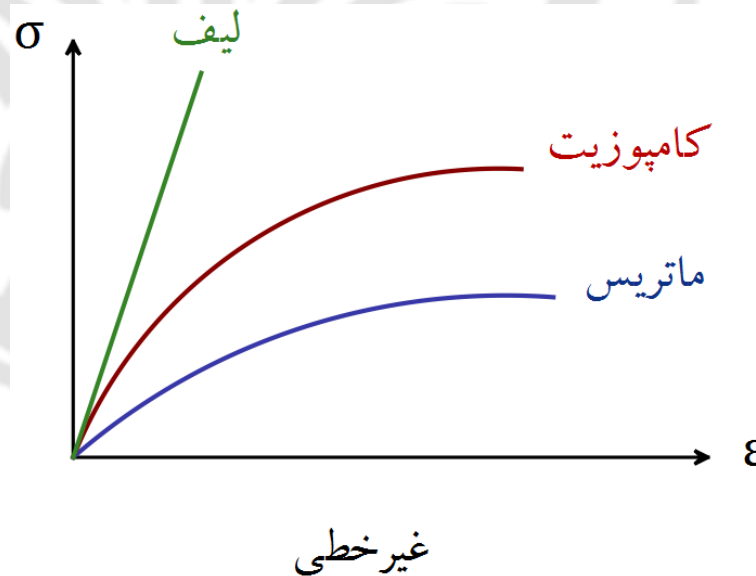
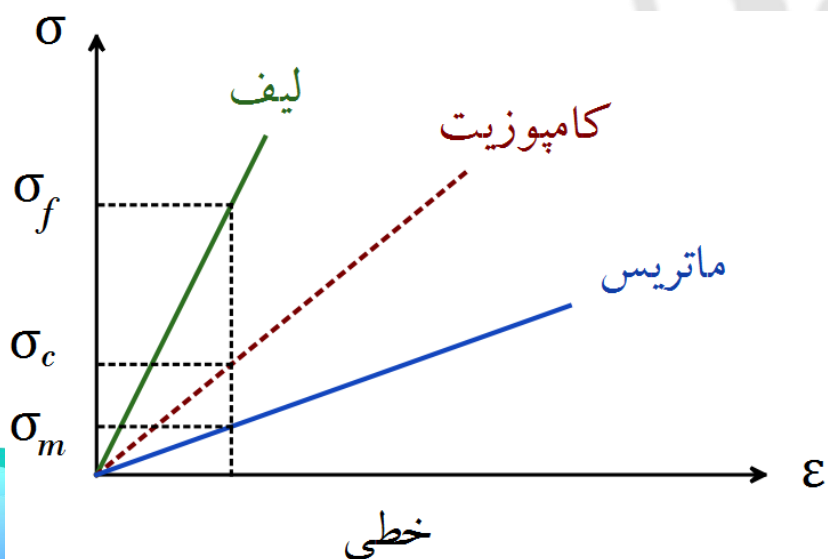
وقتی تنش اعمال می شود این خطوط تغییر شکل می دهند، به دلیل داشتن استحکام و مدول بالاتر، کرنش ماتریس بیشتر از کرنش لیف است. در این حالت مانند آن است که در سطح مشترک یک تنش برشی ایجاد می شود چون حرکت و جابه جایی آن ها متفاوت است بنابراین تفاوت در کرنش، در سطح لیف تنش برشی ایجاد می کند.

تنش برشی نیرو را به لیف وارد کرده و یک تنش کششی در لیف ایجاد می شود.

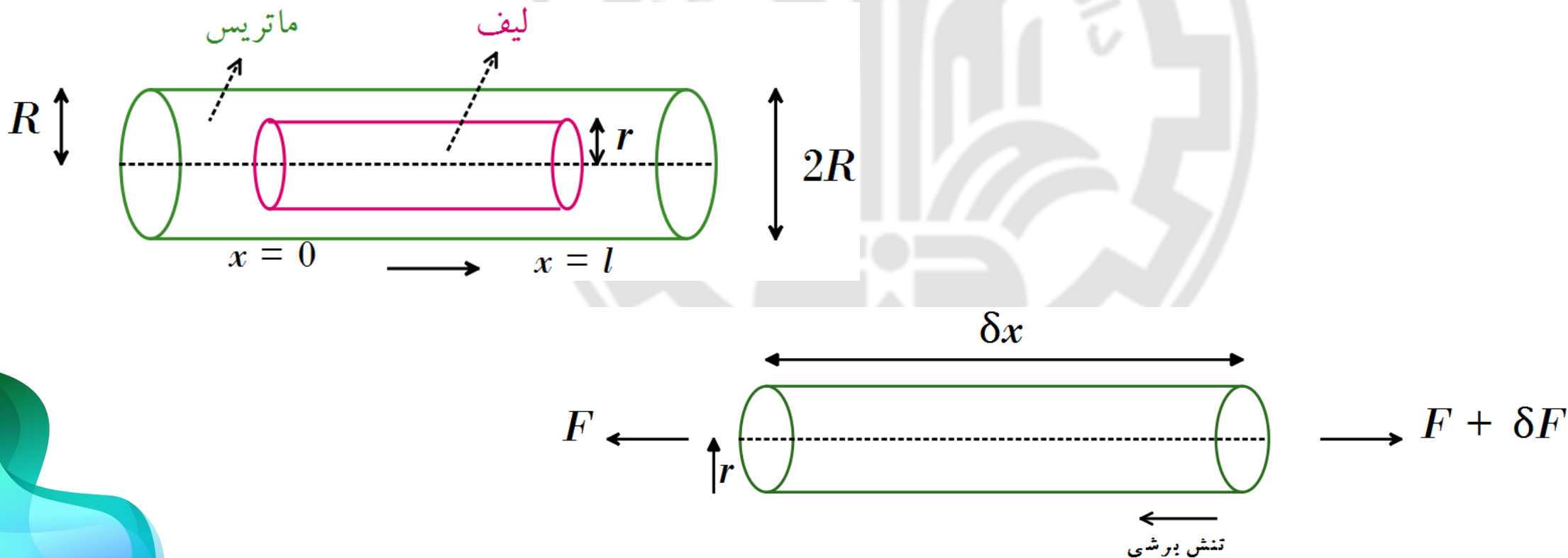
Max تنش برشی در انتهای لیف است و در مرکز تنش برشی صفر است. Max تنش برشی در جایی است که تنش کششی صفر است و در مرکز تنش کششی max است.

تغییر شکل به وجود آمده در لیف و ماتریس باید به صورت زیر باشد:

دو نمودار در رفتارهای الاستیک و پلاستیک رسم شده اند.



این بار COX در سال ۱۹۵۲ یک تئوری و آنالیز تحت عنوان Shear-lag analysis را مطرح کرد. یک لیف بلند نازک با طول l و شعاع r که کاملاً در یک فاز ماتریس پیوسته قرار گرفته باشند، در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم ماتریس به صورت کامل و همگن تغییر شکل داده است. از آن جایی که تنش برشی در سطح مشترک لیف و ماتریس در طول لیف تغییر می‌کند و از طرف دیگر نیرو در سطح لیف تغییر می‌کند و در مرکز صفر است. برای آنالیز یک المان از لیف که دارای طول δx است و شعاع آن r است و نیروی F به آن وارد می‌شود و یک تنش برشی در سطح جانبی لیف وارد می‌شود.





$$F + \delta F = F + 2\pi r \delta x \tau$$

$$\delta F = \tau 2\pi r \delta x \quad (1)$$

تغییرات نیرو در لیف:

$$\text{if } \delta x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{dF}{dx} = 2\pi r \tau \quad (2)$$

از طرف دیگر فرض شده که لیف و ماتریس تغییر شکل الاستیک از خود نشان می دهند:

در فاصله ای که $r = R$ باشد، تغییر شکل را با v نشان داده و در جایی که $r = r_0$ باشد، تغییر شکل را با u نشان می دهیم.

$$\frac{dF}{dx} \propto \tau, \quad \tau \propto \gamma, \quad \gamma \propto (u - v)$$

بنابراین خواهیم داشت:



$$\frac{dF}{dx} = H(u - v) \quad (۳)$$

H: ضریب تناسب

جایی که H یک ثابت است برای یک کامپوزیت و مقدار آن وابسته به شکل هندسی و طرز قرار گرفتن الیاف در ماتریس و مدول لیف و ماتریس است. از قانون هوک داریم:

$$F = E_f A_f \frac{du}{dx} \quad (۴)$$

$$\frac{dv}{dx} = \varepsilon$$

A_f : سطح مقطع لیف

E_f : مدول یانگ لیف

از معادله (۳) نسبت به X مشتق می گیریم:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = H \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \right) \quad (۵)$$

مقدار $\frac{du}{dx}$ را از معادله (۴) جایگزین می کنیم:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = H \left(\frac{F}{E_f A_f} - \varepsilon \right) \quad (۶)$$

این معادله دیفرانسیل درجه ۲ دارای راه حل زیر است:

$$F = E_f A_f \varepsilon + B \sinh \beta x + C \cdot \cos \beta x \quad (۷)$$

دو ثابت B و C ثابت انتگرال و β به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta = \left(\frac{H}{E_f A_f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۸)$$

ارزش گذاری و به دست آوردن مقادیر B و C :

$$if \quad F = 0 \rightarrow x = 0, C = 0, \quad if \quad F = 0 \rightarrow x = l$$

(در دو انتها $F = 0$ می شود.)

$$B = \frac{A E_f \varepsilon}{\sinh \beta l}$$

$$\sigma_f = \frac{F}{A_f} = E_f \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\cosh \beta \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta \frac{l}{2}} \right\} \quad (9)$$

معادله بالا توزیع تنش کششی درون لیف است. در لیف تنش برشی تغییر می کند و نیرو را به داخل لیف منتقل می کند و یک تنش کششی در لیف ایجاد می شود. این اصول در الیاف کوتاه ضروری است. (مثلا میخواهیم بررسی کنیم ته لیف شکسته شده می تواند انتقال بار صورت بدهد یا نه.)



بهترین آنالیز بررسی چسبندگی از طریق محاسبه تنش برشی و تنش کششی در لیف است. از این طریق می توان سطوح الیاف را اصلاح و درگیری الیاف و ماتریس و در کل چسبندگی را بهبود بخشید. (بهترین آنالیز برای تعریف تنش روی سطح لیف)

از نتیجه به دست آمده می توان میانگین تنش کششی در لیف را به راحتی بدست آورد:

$$\bar{\sigma}_f = E_f \varepsilon \left\{ 1 - \frac{\tanh \frac{\beta l}{2}}{\beta \frac{l}{2}} \right\} \quad (10)$$

قبلا گفتیم $\sigma_1 = \sigma_f \nu_f + \sigma_m \nu_m$ ، گفته های قبل را نقض کرد و باید آنها را اصلاح کرد:

در اینجا دیگر σ_f موضوعیت ندارد و باید $\bar{\sigma}_f$ جایگزین شود.



$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_f v_f + \sigma_m v_f \quad (11)$$

$$\sigma_1 = E_f v_f \varepsilon \left\{ 1 - \frac{\tanh \beta \frac{l}{2}}{\beta \frac{l}{2}} \right\} + (1 - v_f) E_m \varepsilon \quad (12)$$

به جای $\sigma = E \times \varepsilon$ قرار داده ایم. در محاسبات E_1 هم دچار تغییر می شود چرا که طبق تعریف:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon} = E_f v_f \left\{ 1 - \frac{\tanh \beta \frac{l}{2}}{\beta \frac{l}{2}} \right\} + (1 - v_f) E_m \quad (13)$$

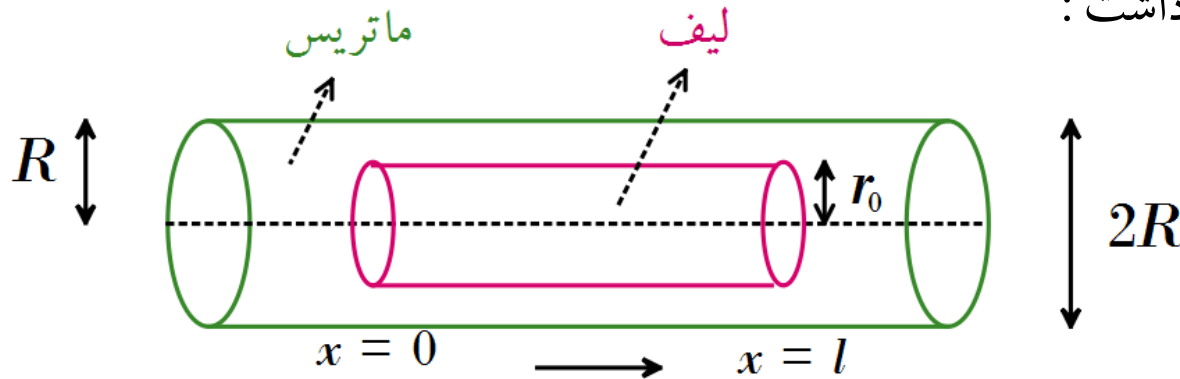
برای الیاف کوتاه این مباحث مهم است.

می خواهیم توزیع و طرز به دست آوردن H و β را بدست آوریم:

■ طرز به دست آوردن β :

ما می توانیم به صورت تقریب مقدار H را بر روی یک کامپوزیت با شکل هندسی ویژه به دست آوریم ، فرض کنید یک کامپوزیت شامل تعداد زیادی الیاف موادی با طول ثابت l باشند و دارای سطح مقطع دایره ای r_0 باشند .

میانگین مرکز تا مرکز الیف را $2R$ در نظر بگیرید. اگر $\tau(r)$ تنش برشی در فاصله شعاعی الیف باشد بر سطوح موازی با این محور خواهیم داشت :



$$\frac{dF}{dx} = 2\pi r_0 \tau(r_0) \quad (14) \quad , H = \frac{2\pi r_0 \tau(r_0)}{(u - v)} \quad (15) \quad , \frac{dF}{dx} = H(u - v) \quad (16)$$

در نظر بگیرید W جابجایی واقعی ماتریس نزدیک به لیف باشد با فرض اینکه لغزش بین لیف و ماتریس وجود نداشته باشد و در سطح ترک لیف و ماتریس $W=U$ است. در فاصله R از مرکز لیف $W=U$ است و در فاصله ای از مرکز لیف $W=V$ است.

اگر تعادل نیرو در ماتریس بین R و r_0 در نظر بگیریم:

$$2\pi r \cdot \tau(r) = \text{ثابت} = 2\pi r_0 \cdot \tau(r_0)$$

می توان از معادله (۱۶) نوشت:

$$\Delta w = u - v$$

$$u - v = \frac{2\pi r_0 \cdot \tau(r_0)}{H} \rightarrow \Delta w = \frac{\tau(r_0) \cdot r_0}{G_m} \ln \frac{R}{r_0}$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{\tau(r)}{G_m} = \frac{\tau(r_0) \cdot r_0}{G_m r} \quad (17)$$



با توجه به معادله (۱۷) خواهیم داشت:

$$dw = \left(\int_{r_0}^R \frac{1}{r} dr \right) \left(\frac{\tau(r_0) \cdot r_0}{G_m} \right) \frac{2\pi r_0 \cdot \tau(r_0)}{H} = \frac{\tau(r_0)}{G_m} \ln \frac{R}{r_0}$$

$$\Delta w = \frac{\tau(r_0) \cdot r_0}{G_m} \ln \frac{R}{r_0}$$

$$H = \frac{2\pi G_m}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (۱۸)$$

$$\beta = \left(\frac{H}{E_f A_f} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \beta = \left(\frac{2\pi G_m}{E_f A_f \ln \frac{R}{r_0}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

اگر فرض کنیم الیاف مدور باشند:

$$\beta = \left\{ \left(\frac{G_m}{E_F} \right) \left(\frac{2\pi}{A_f \ln \frac{R}{r_0}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

الیاف مدور با آرایش مختلف خواهیم داشت:

الیاف با آرایش شش ضلعی:

$$v_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

الیاف با آرایش مربعی:

$$v_f = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2$$



معادلات به دست آمده می تواند β را از مقادیر G_m و G_f و A_f و v_f به دست آورد.
از معادلات ۱۲ و ۱۴ می توان تنش برشی (τ) در سطح مشترک لیف و ماتریس را به دست آورد.
اگر الیاف دارای سطح دایره ای شکل باشند:

$$F = \pi r_0^2 \sigma \quad (21)$$

$$\tau = E_f \varepsilon \left(\frac{G_m}{2E_f \ln \frac{R}{r}} \right) \frac{\frac{1}{2} \sinh \beta \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \beta \frac{l}{2}} \quad (22)$$

این رابطه توزیع تنش برشی در سطح لیف را نشان می دهد. (در سطح مشترک لیف و ماتریس)



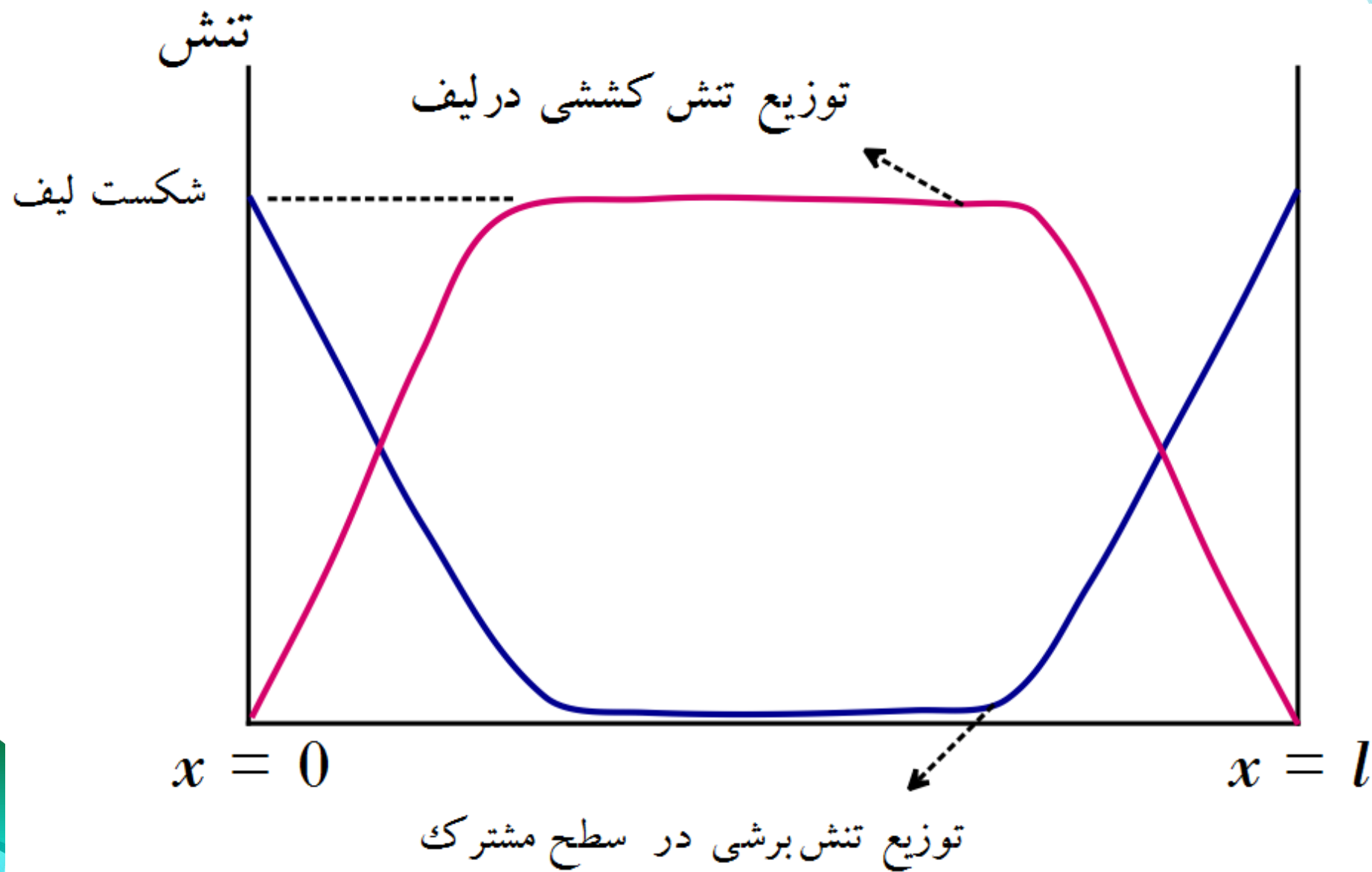
می توان برای الیاف کوتاه یا تعریف سطوح مشترک از این روابط استفاده کرد. اگر بخواهیم روی سطح کار کنیم و سطح مشترک را اصلاح کنیم باید l_c را نیز لحاظ کنیم. با استفاده از یک سری معادلات می توان نوشت:

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{f max}} = \left(\frac{G_m}{2E_f \ln \frac{R}{r}} \right)^{\frac{1}{2}} \coth \frac{\beta l}{4} \quad (23)$$

برای لیف بسیار بلند می توان نوشت:

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{f max}} = \left(\frac{G_m}{2E_f \ln \frac{R}{r}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

نکته: اثبات با استفاده از معادلات قبلی که σ و τ را تعریف کرده ایم $x = \frac{l}{2}$





نکته: نسبت $\frac{\tau_{max}}{\sigma_{f max}}$ با تغییر کسر حجمی الیاف تغییر می کند. یعنی با تغییر در کسر حجمی و خواص مواد $\frac{G_m}{G_f}$ به راحتی می توان نسبت max تنش برشی در سطح مشترک و تنش کششی درون لیف را تغییر داد.

کامپوزیت	$\frac{G_m}{E_f}$	V_f	$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{f max}}$
شیشه - پلی استر	0.017	0.3	0.13
	0.017	0.6	0.25
کربن I - اپوکسی	0.005	0.3	0.07
	0.005	0.6	0.13
کولار ۴۹ - اپوکسی	0.014	0.3	0.12
	0.014	0.6	0.23