دانشگاه صنعتی اصفهان
Isfahan University of Technology

کامپوزیت های پیشرفته

استاد درس
دکتر علی زادهوش

فصل پنجم
آنالیز مکانیکی کامپوزیت های الیاف بلند
(چندلایه ها)

۱۳۹۹

❑ آنالیز مکانیکی چندلایه ها

در بخش قبلی یک راه حل مناسب برای آنالیز بارگذاری صفحه ای چندلایه های متقارن ارائه گردید. بیشتر چندلایه ها از این نوع هستند و بنابراین راه حل ذکر شده برای آنها مناسب است. از طرف دیگر، در بسیاری از موقعیت ها، چندلایه های متقارن یا نا متقارن ممکن است تحت سایر انواع بارگذاری (شامل خمش) قرار بگیرند. به منظور آنالیز چنین موقعیت هایی، مناسب تر است که آنالیزهای عمومی تری را مرد بررسی قرار دهیم.

- **قرارداد عمومی برای تعیین ضخامت و موقعیت لایه ها**

در بیشتر آنالیزهای عمومی ضروری است که موقعیت و ضخامت لایه ها را در چند لایه تعریف کنیم. به طور رایج لایه وسطی به عنوان لایه مبنا در نظر گرفته می شود. لایه های بالایی و لایه های پایینی نسبت به لایه مبنا تعریف می شوند. لایه های بالاتر از لایه مبنا، منفی و لایه های پایین تر از لایه مبنا، مثبت در نظر گرفته می شوند. سطح زیرین f امین لایه به صورت h_f و سطح بالایی این لایه به صورت h_{f-1} تعریف می شود. بنابراین ضخامت f امین لایه از رابطه زیر به دست می آید:

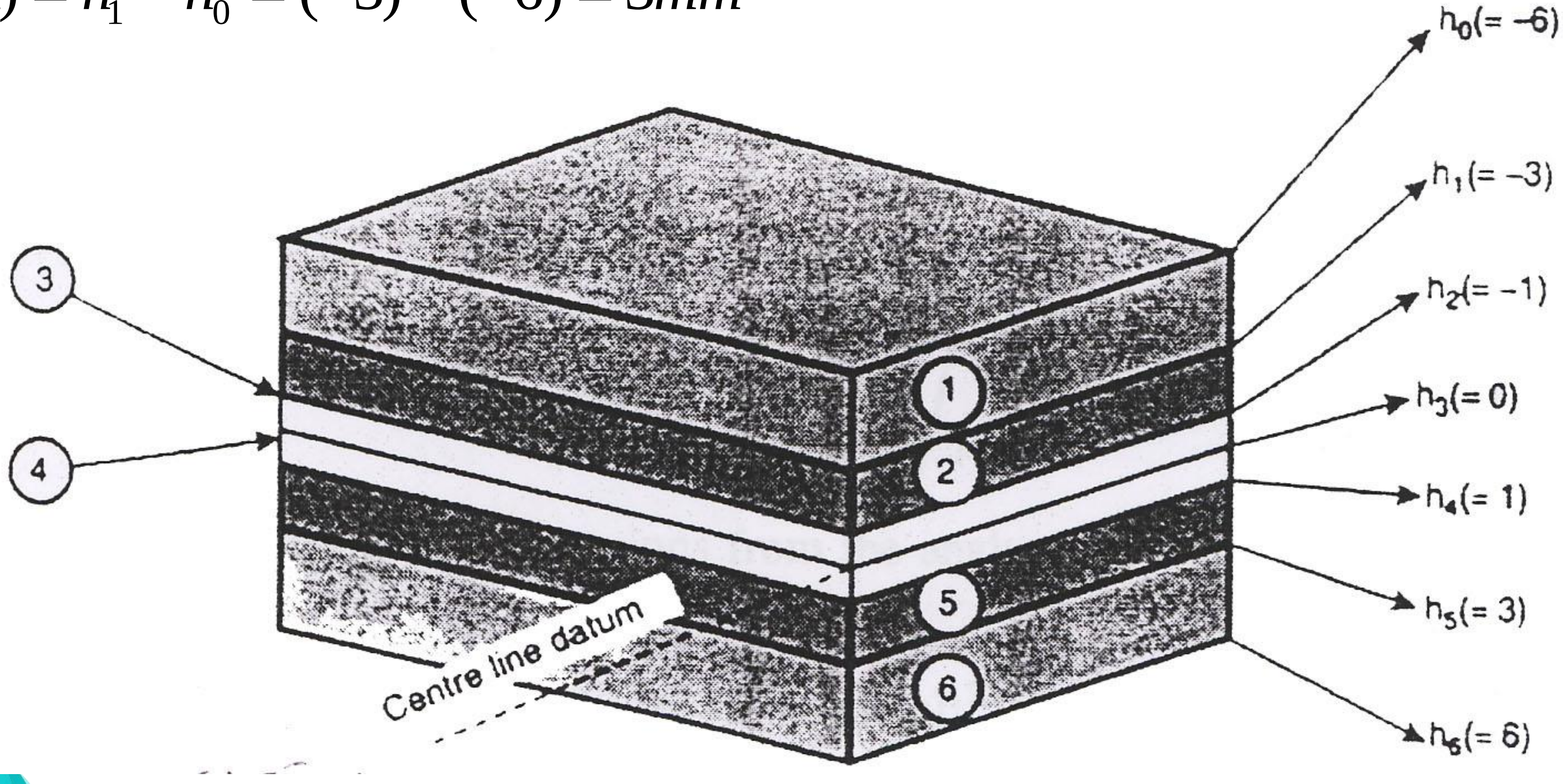
$$\boxed{h(f)=h_f-h_{f-1}} \qquad (1)$$

برای چندلایه متشکل از ۶ لایه که در شکل زیر نشان داده شده است، ضخامت لایه پنجم از رابطه زیر به دست می آید:

$$h(5)=h_5-h_4=3-1=2mm$$

و ضخامت لایه اول از رابطه زیر به دست می آید:

$$h(1)=h_1-h_0=(-3)-(-6)=3mm$$



چندلایه متشکل از ۶ لایه

دکتر علی زادهوش

• آنالیز چندلایه

آنالیز عمومی یک چندلایه بسیار شبیه آنالیز ماکرومکانیک یک تک لایه است.

• تعادل نیروها

اگر تعداد لایه ها F باشد، برآیند نیروها، N_l، برای چندلایه از رابطه زیر به دست می آید:

$$[N]_L = \sum_{f=1}^{F} [N]_f = \sum_{f=1}^{F} \int_{h_{f-1}}^{h_f} [\sigma]_f \, dz \qquad (۲)$$

با استفاده از تعریف $[\sigma]$ در آنالیز تک لایه، رابطه زیر به دست می آید:

$$[N]_L = \sum_{f=1}^{F} \left([\overline{Q}][\varepsilon] + [\overline{Q}]z.[k]\right)_f dz = \sum_{f=1}^{F} \left\{ [\overline{Q}][\varepsilon] \int_{h_{f-1}}^{h_f} dz + [\overline{Q}][k] \int_{h_{f-1}}^{h_f} z.dz \right\}_f \qquad (۳)$$

$$[N]_L = [A][\varepsilon]_L + [B][k]_L \qquad (۴)$$

که ماتریس $[A]$ ماتریس سفتی کششی به صورت زیر تعریف می شود و مشابه ماتریسی است که برای تک لایه تعریف کردیم:

$$[A]=\sum_{f=1}^{F}[\overline{Q}]_f(h_f-h_{f-1}) \qquad (۵)$$

همچنین ماتریس مزدوج $[B]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[B]=\frac{1}{2}\sum_{f=1}^{F}[\overline{Q}]_f(h_f^2-h_{f-1}^2) \qquad (۶)$$

ماتریس مزدوج برای چندلایه های متقارن برابر صفر است.

❑ تعادل گشتاور ها

مشابه تعادل نیروها، گشتاور برآیند از مجموع گشتاورهای F لایه به دست می آید:

$$[M]_L = \sum_{f=1}^{F} \int_{h_{f-1}}^{h_f} \left([\overline{Q}].[\varepsilon]z + [\overline{Q}].z^2.[k] \right) dz = \sum_{f=1}^{F} \left\{ [\overline{Q}].[\varepsilon] \int_{h_{f-1}}^{h_f} zdz + [\overline{Q}].[k] \int_{h_{f-1}}^{h_f} z^2.dz \right\}_f \quad (۷)$$

$$[M]_L = [B][\varepsilon]_L + [D][K]_L \quad (۸)$$

که ماتریس $[B]$ مشابه رابطه (۴-۵) تعریف می شود و ماتریس $[D]$ به صورت زیر است:

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{f=1}^{F} [\overline{Q}]_f \left(h_f^3 - h_{f-1}^3 \right) \quad (۹)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ k \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

این معادله ممکن است برای تعیین ثابت های الاستیک، کرنش ها و انحناهای خمش مناسب باشد. این آنالیز نسبت به آنالیز صفحه ای کارایی بیشتری دارد زیرا علاوه بر شرایط تنش صفحه ای، بارگذاری خمشی نیز مورد لحاظ قرار گرفته است.

- **چندلایه های تشکیل شده از لایه های تک جهته**

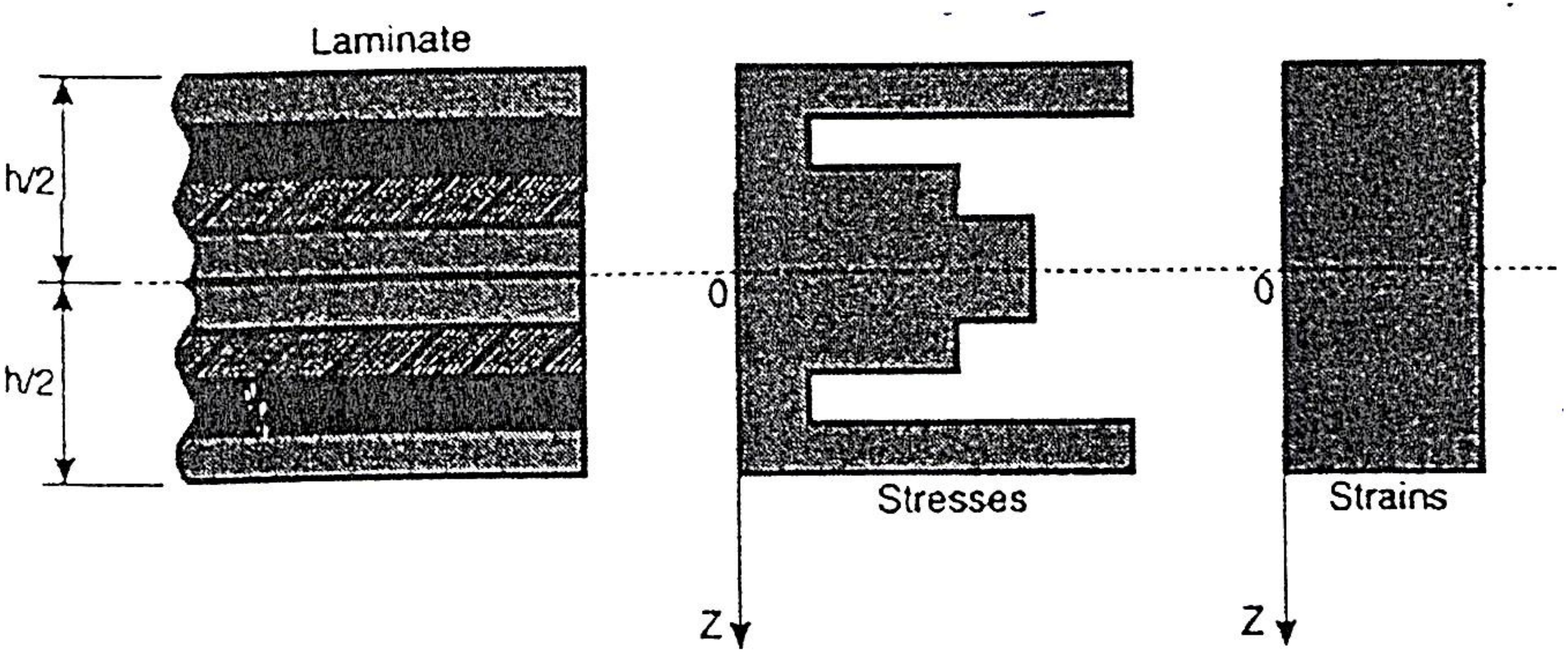
آنالیز قبلی نشان داده است که ویژگیهای کامپوزیتهای لیفی تک جهته به مقدار زیادی غیر ایزوتروپ است. برای کاهش این مشکل، به طور رایج چندلایه های متشکل از تک لایه های تک جهته را به گونه ای می سازند که تک لایه ها در جهات مختلف آرایش یافتگی قرار گرفته باشند. در نگاه اول ممکن است اینگونه به نظر برسد که بهترین حالت ایزوتروپی به وسیله چندلایه متشکل از دو لایه تک جهته عمود بر هم به دست آید. برای مثال دو لایه جهت گیری شده در جهات 0^{o} و 90^{o} یا دو لایه جهت گیری شده در جهات $+45^{o}$ و -45^{o} نسبت به محور جهانی x، که در همه جهات بالانس هستند. در حقیقت عدم تقارن نسبت به مرکز چنین چندلایه هایی مشکل ساز است و منجر به رفتار پیچیده در چنین حالاتی می شود.

به طور کلی بهتر است که چندلایه نسبت به مرکز متقارن باشد. یک چندلایه که لایه های بالایی مرکز و لایه های پایینی آن تصویر آینه یک دیگرند، به عنوان چندلایه متقارن در نظر گرفته می شود. بنابراین یک چهار لایه با الیاف آرایش یافته در جهات 0^o ، 90^o، 90^o و 0^o متقارن است. رایج است که این چندلایه را به صورت $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]_T$ یا $[0^\circ/90^\circ{}_2/0^\circ]_T$ یا $[0^\circ/90^\circ]_S$ علامت گذاری کنیم. به طور معمول چندلایه هایی از نوع $[\theta^\circ/-\theta^\circ/-\theta^\circ/\theta^\circ]_T$ متقارن هستند البته تعداد لایه ها ممکن است الزاماً زوج نباشد. لایه ها الزاماً ضخامت یکسانی ندارند اما متقارن بودن چندلایه بایستی ذکر گردد.

در حالت چندلایه هایی که لایه مرکزی تکرار نیافته است، بایستی بالای لایه مرکزی علامت بار قرار گیرد. بنابراین چندلایه ای به فرم $[45/-45/0/90/0/-45/45]_T$ می تواند به صورت $[\pm 45/0/\overline{90}]_S$ نوشته شود.

▪ رفتار in-plane (صفحه ای) یک چندلایه متقارن

در یک چندلایه، تک لایه ها به طور محکمی به هم متصل شده اند، بنابراین و قتی چندلایه تحت تأثیر یک نیروی صفحه ای قرار می گیرد، همه لایه ها به یک میزان تغییر فرم پیدا می کنند. بنابراین کرنش ها در همه لایه ها یکی است اما مدول ها متفاوت است و در نتیجه تنش ها متفاوت است. این حالت در شکل زیر نشان داده شده است.



تنش ها و کرنش ها در یک چندلایه متقارن

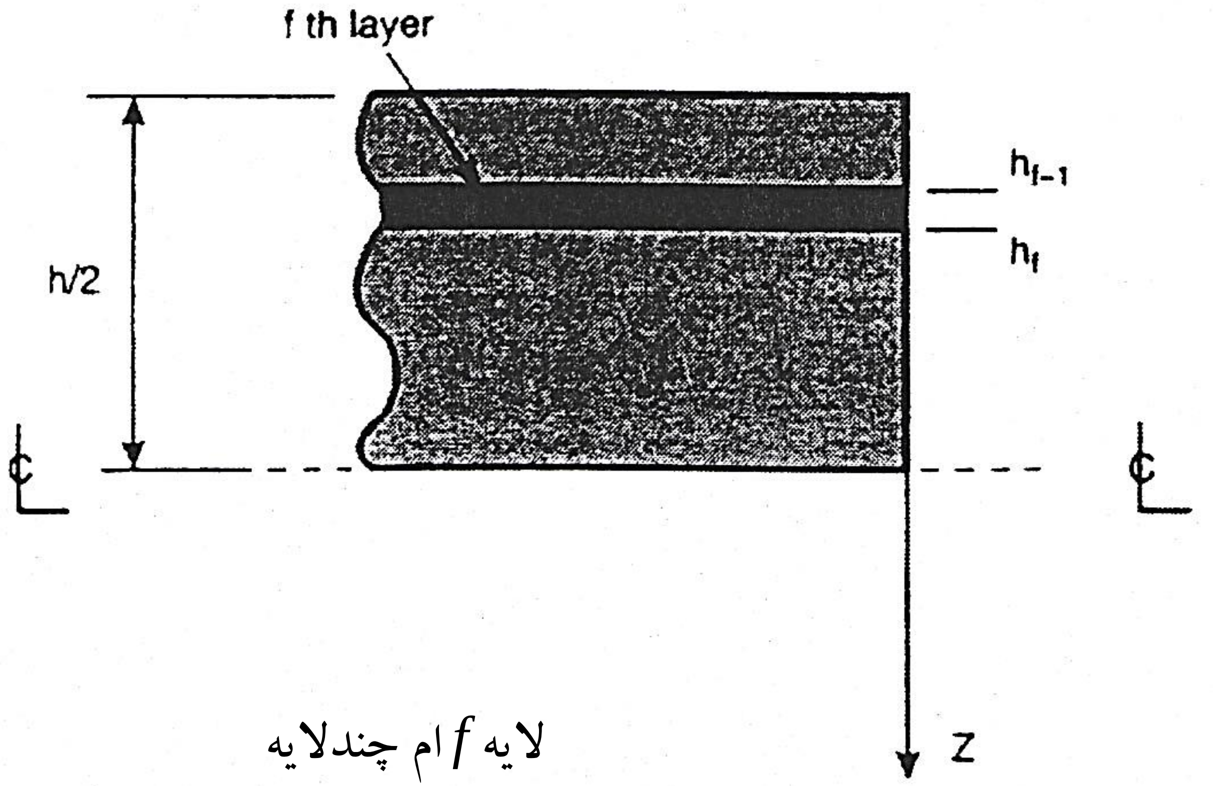
وقتی نیروهای خارجی در جهت محورهای جهانی x و y وارد می شود، آنها برابر با مجموع نیروهای وارده به تک لایه ها می شوند. بنابراین برای واحد عرض چندلایه تنشها یا نیروها ممکن است به صورت زیر بیان شوند:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_f \, dz \quad \text{یا} \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_f \, dz$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y)_f \, dz \quad \text{یا} \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_y)_f \, dz \qquad (۱۱)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_f \, dz \quad \text{یا} \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_f \, dz$$

که h ، ضخامت چندلایه، σ_x و N_x به ترتیب تنش ها و نیروهای کلی و $(\sigma)_f$ تنش در لایه fام است. (شکل زیر)



لایه f ام چندلایه

دانشگاه صنعتی اصفهان
Isfahan University of Technology

روابط (۱۱) به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_f dz = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym. & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_f dz \qquad (۱۲)$$

از آنجا که کرنش ها مستقل از Z هستند، می توانند از انتگرال خارج شوند:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym. & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} dz \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_f \qquad (۱۳)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_f \frac{1}{h}$$

یا $\left([N]_{xy} = [A][\varepsilon]_{xy} \right)$ (۱۴)

به عنوان مثال:

$$A_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11} dz = 2.\int_{0}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{11} dz$$ (۱۵)

$[A]$ ماتریس سفتی کششی است اگرچه بایستی توجه کرد که شامل اجزاء برشی نیز است.

در یک تک لایه، مثلاً تک لایه f ام، $\bar{Q}$ ثابت است بنابراین:

$$A_{11}^{f} = \sum \overline{Q}_{11}^{f} h_{f} \qquad (۱۶)$$

رابطه فوق به صورت کلی به فرم زیر است:

$$[A] = \sum_{f=1}^{P} \overline{Q}_{11}^{f} h_{f} \qquad (۱۷)$$

بنابراین ماتریس سفتی برای یک چندلایه متقارن ممکن است بوسیله جمع زدن همه اجزاء ماتریس سفتی تک لایه ها ضربدر ضخامت هرلایه به دست آید.

در صورت داشتن همه اجزاء ماتریس سفتی، می توان برای به دست آوردن ماتریس کامپلیانس آن را معکوس کرد:

$$\boxed{[a]=[A]^{-1}} \tag{۱۸}$$

ویژگی های چندلایه ممکن است به وسیله اجزاء ماتریس کامپلیانس به دست آیند:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{a_{11}h} \\ E_y &= \frac{1}{a_{22}h} \\ G_{xy} &= \frac{1}{a_{66}h} \end{aligned}} \tag{۱۹}$$

که h ضخامت چندلایه است. همچنین روابط ضریب پواسون به صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{aligned} \nu_{xy} &= \frac{-a_{12}}{a_{11}} \\ \nu_{yx} &= \frac{-a_{12}}{a_{22}} \end{aligned}} \qquad (۲۰)$$

خلاصه مراحل برای پیش بینی سفتی چندلایه های متقارن

۱. ماتریس سفتی $[\bar{Q}]$ مطابق فصل قبل برای هر تک لایه به دست می آید.

۲. ماتریس سفتی $[A]$ ، برای چندلایه از جمع بستن ماتریس های $[\bar{Q}]$ هرتک لایه ضربدر ضخامت آن لایه به دست می آید.

۳. ماتریس کامپلیانس $[a]$ ، برای چندلایه به وسیله معکوس کردن ماتریس $[A]$ به دست می آید.

۴. تنش ها و کرنش های چندلایه از رابطه زیر به دست می آیند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [a].\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} h \qquad (۲۱)$$

مثال:

یک چندلایه از لایه های زیر تشکیل شده است:

$$[0\ /\ 35_2\ /\ -35_2]_S$$

مطلوب است محاسبه مدول در جهت x و y و کرنش ها وقتی که تنش های زیر را داشته باشیم:

$$\sigma_x = 10\ MPa\ , \qquad \sigma_y = -14MPa\ , \qquad \tau_{xy} = -5MPa$$

ضخامت هر لایه $1mm$ می باشد. (اطلاعات هر لایه را باید از میکرومکنیک به دست آورد.)

مسئله در حقیقت $E_x\ , E_y\ , G_{xy}\ , \nu_{xy}$ را می خواهد.

$$E_1 = 125000MPa, E_2 = 7800MPa, G_{12} = 4400MPa, \nu_{12} = -0.34$$

مثال:

برای یک چند لایه $[0\ /\ 35_2\ /\ -35_2]_S$ با توجه به داده های مثال قبلی :

۱. مطلوب است محاسبه پرامترهای تغییر شکل صفحه ای؟

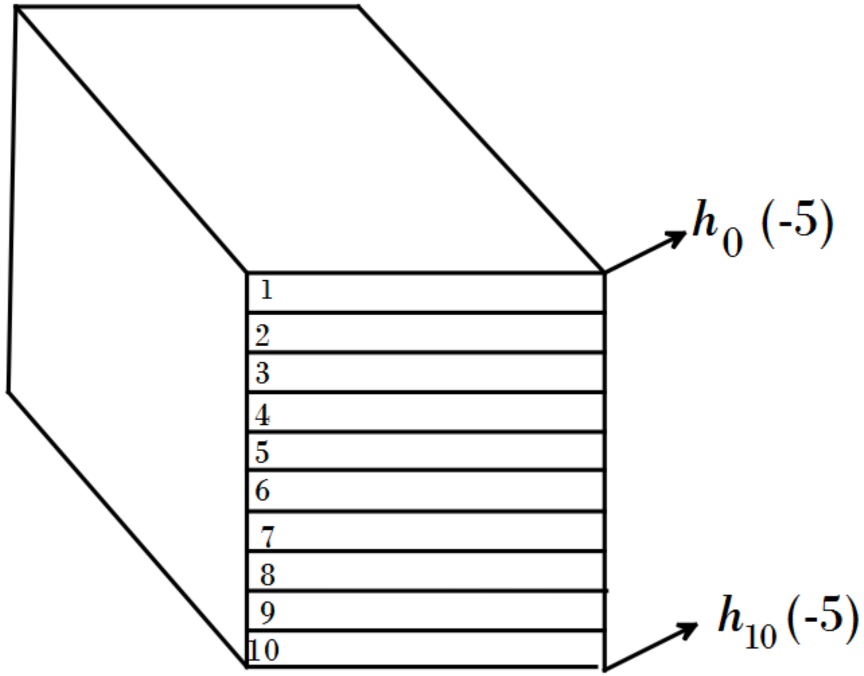
۲. اگر یک نیروی خمشی ۱۰۰۰ نیوتنی اضافه گردد مطلوب است، محاسبه تنش ها و کرنش ها و شعاع های خمشی؟

هر لایه دارای ضخامت $1mm$ است.

$$h_0(5), h_1(-4), h_2(3),$$

$$h_3(-2), h_4(-1), h_5(0),$$

$$h_6(1), h_7(2) h_8(3) h_9(4) h_{10}(5)$$



مسئله:

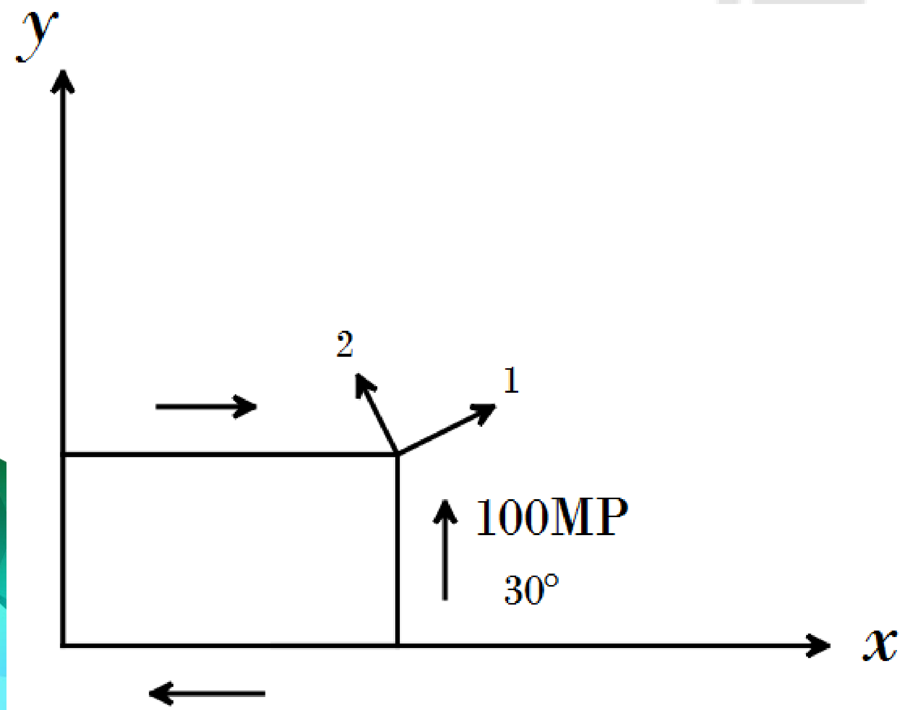
فرض کنید ماده کامپوزیتی از نوع الیاف کربن تقویت شده پلیمری با خواص زیر داریم:

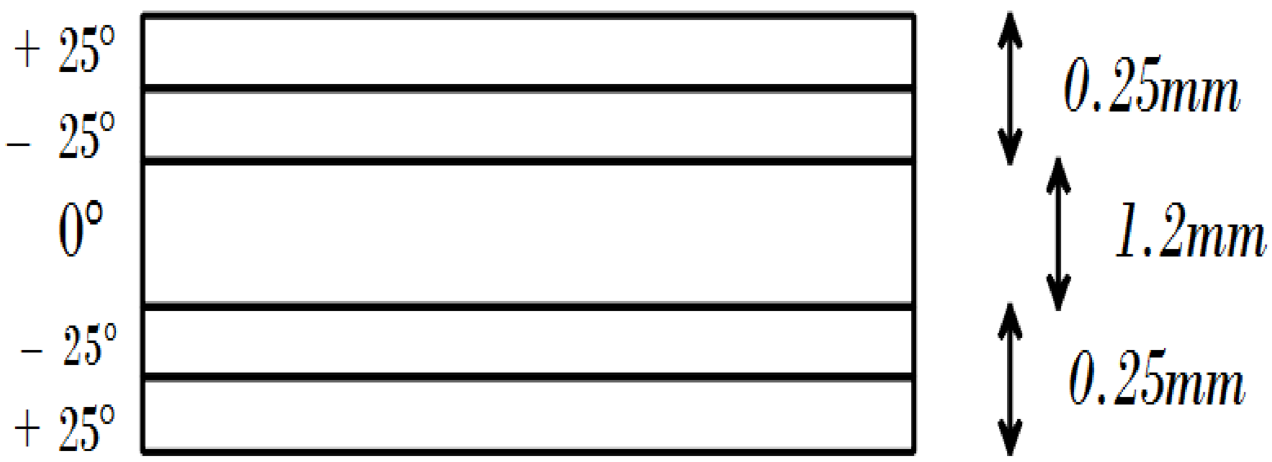
بخش اول: ورقه ای از نوع کامپوزیت فوق طبق شکل زیر تحت تنش قرار می گیرد. مطلوب است محاسبه :

۱. کرنش ها در دستگاه های محور های ۱ و ۲ ، x و y در حالتی که تنش برشی $100MPa$ به این ورقه با زاویه $30°$ نسبت به جهت گیری الیاف با استفاده از معادلات تبدیل مهندسی

۲. پارامترهای خواسته شده در قسمت ۱ را با استفاده از ماتریس نیز محاسبه کنید.

بخش دوم: یک چند لایه از نوع کامپوزیت فوق به صورت شکل زیر وجود دارد ، ماتریس های A,B,C,D را محاسبه کنید.





مثال:

یک ساندویچ پنل از یک مغزی ابری و دو پوسته جامد ساخته شده است که این پوسته و مغزی را لایه های ایزوتروپیک می توان در نظر گرفت که دارای خواص ذیل می باشند: (داده ها واقعی می باشند.)

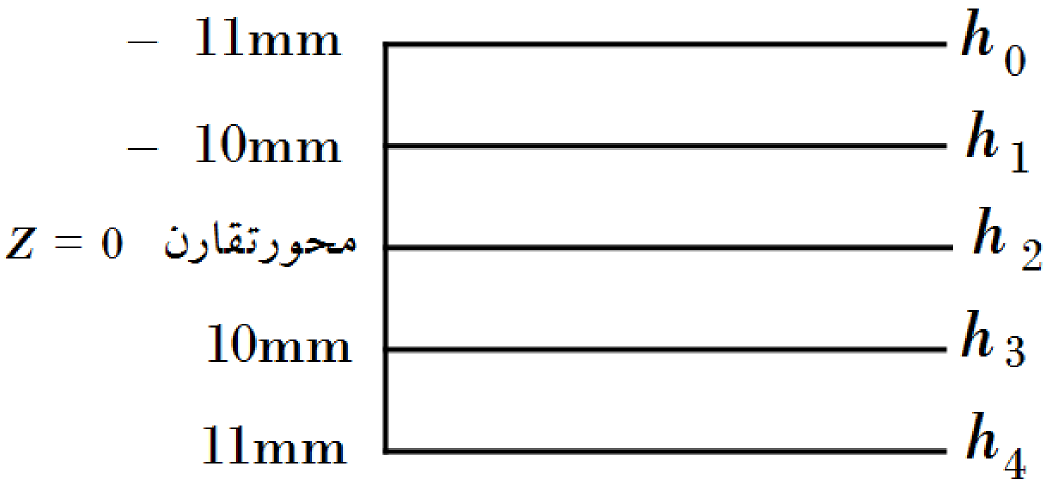
ضخامت لایه پوسته ۱ میلی متر و ضخامت مغزی ۲۰ میلی متر می باشد.

اگر نیروی خمشی $M_x = 400\,\frac{Nm}{m}$ و $M_y = 300\,\frac{Nm}{m}$ به این ساندویچ پانل اعمال شود ، مطلوب است محاسبه شعاع های خمش و تنش ها و کرنش ها در سطح مقطع.

در این حالت زاویه مهم نیست (ایزوتروپیک است) بنابراین ماتریس های $\bar{Q} = Q$ است.

پوسته **A** $\quad E_1 = E_2 = 3.5GPa\,, G_{12} = 1.25GPa\,, \nu_{12} = 0.4$

مغزی **B** $\quad E_1 = E_2 = 0.06GPa\,, G_{12} = 0.021GPa\,, \nu_{12} = 0.43$



مثال : سوال امتحانی

یک سری تک لایه با خواص ذیل به صورت $[0\ /\ 25_2\ /\ -25_2]_S$ (۱۰ لایه) است.

۱. مطلوب است محاسبه ثابت های الاستیک (مدول ها) در جهت x و y و کرنش ها وقتی که تنش های زیر به آنها اعمال می شود. ضخامت هر لایه 1mm است.

$$\sigma_x = 10\ MPa\ , \qquad \sigma_y = -14 MPa\ , \qquad \tau_{xy} = -5 MPa$$

$$E_1 = 125 GPa, E_2 = 7.8 GPa, G_{12} = 4.4 GPa, \nu_{12} = 0.34$$

بایستی مدول ها و کرنش ها ($E_x\ , E_y\ , G_{xy}\ , \nu_{xy}\ , \varepsilon_x\ , \varepsilon_y\ , \gamma_{xy}$) را به دست آورد.

۲. اگر تنش های خمشی $M_x = 400\frac{Nm}{m}$ و $M_y = 300\frac{Nm}{m}$ و $M_{xy} = 200\frac{Nm}{m}$ به این چند لایه وارد شود، مطلوب است محاسبه تنش های جدید و کرنش ها و شعاع های انحنا ؟ (کرنش های خمشی همان k ها هستند.)