دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی نساجی

درس: مکانیک سیالات

استاد: دکتر علی زادهوش

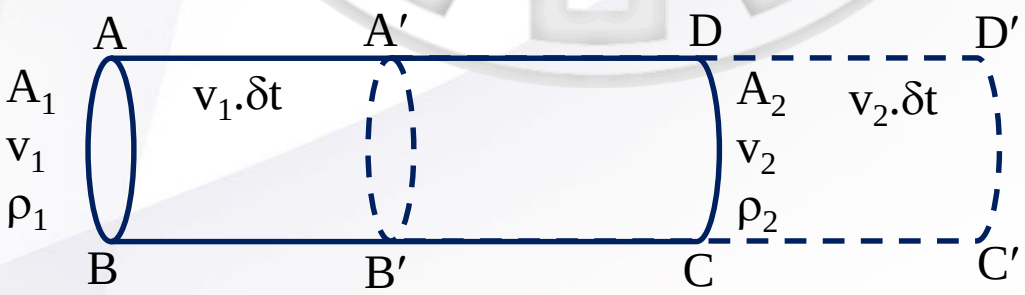
اردیبهشت ۱۴۰۰

فصل پنجم: معادله مومنتوم و کاربرد آن

✓ معادله مومنتوم خطی برای یک جریان سیال:

در مکانیک مومنتوم عبارت است از جرم ذره ضربدر سرعت حرکت آن. پس وقتی یک جریان از سیال وجود دارد، چون ذرات دارای سرعت هستند، مومنتوم دارند. مومنتوم یک کمیت برداری است، یعنی هم جهت و هم اندازه دارد و با تغییر جهت سرعت و اندازه سرعت، مومنتوم ایجاد می شود. بنابراین هر چیزی مانند همزن یا پمپ می توانند مومنتوم ایجاد کنند، به عبارتی باید یک نیرو جهت ایجاد مومنتوم وجود داشته باشد. این نیرو طبق قانون نیوتن برابر با $m \times a$ است که a به مفهوم $\frac{V}{t}$ می باشد. پس نیرو معادل $\frac{mV}{t}$ می شود که نرخ تغییر مومنتوم می باشد. پس هر تغییر مومنتوم برابر با F است، یعنی هر تغییر مومنتوم یک نیرو (F) می خواهد و سیال هم نیروی عکس العمل F را به عاملی که باعث تغییر مومنتوم شده، بر می گرداند. به این مجموعه نیروها، دینامیک گفته می شود. در یک جریان ممکن است نیروهای استاتیک و دینامیک با هم وجود داشته باشند.

برای اثبات، یک المان در نظر می گیریم و در آن تغییر مومنتوم ایجاد می کنیم و رابطه ای برای مومنتوم بدست می آوریم. بدین منظور ابتدا یک حجم کنترل را در نظر بگیرید. حجم کنترل را به صورت لوله جریان در نظر می گیریم، یعنی یک لوله مجازی که مجموعه ای از خطوط جریان است. جریان پایدار است یعنی تغییرات نسبت به زمان نداریم. همچنین جریان یکنواخت می باشد، یعنی نسبت به مکان هم تغییرات وجود ندارد.



دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

بعد از گذشت زمان δt، سطح AB به $A'B'$ و DC به $D'C'$ رسیده اند.

AA' فاصله $= v_1.\delta t$, DD' فاصله $= v_2.\delta t$

چون جریان پایدار است:

$CC'DD'$ جرم سیال $= AA'BB'$ جرم سیال $\Rightarrow \rho_2 A_2 v_2 \delta t = \rho_1 A_1 v_1 \delta t$

یعنی جرم سیالی که خارج می شود با جرم سیالی که وارد می شود، برابر است.

δt در زمان $ABCD$ سیال مومنتوم = $CC'DD'$ سیال مومنتوم افزایش – $AA'BB'$ سیال مومنتوم کاهش (1)

$CC'DD'$ سیال مومنتوم = جرم × سرعت = $\rho_2 A_2 v_2 \delta t \times v_2 = \rho_2 A_2 v_2^2 \delta t$ (2)

$AA'BB'$ سیال مومنتوم = $\rho_1 A_1 v_1^2 \delta t$ (3)

با قرار دادن روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) داریم:

δt در زمان CD و AB میان سیال مومنتوم تغییر = $\rho_2 A_2 v_2^2 \delta t - \rho_1 A_1 v_1^2 \delta t$

با تقسیم رابطه فوق بر δt داریم:

CD و AB میان سیال مومنتوم تغییر یا نرخ سرعت = $\rho_2 A_2 v_2^2 - \rho_1 A_1 v_1^2$

از طرفی $Q = AV$ و $\dot{m} = \rho AV$ است، پس داریم:

شدت جریان جرمی در CD = شدت جریان جرمی در AB، بنابراین:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \dot{m}$$

و در نهایت داریم:

سرعت تغییر مومنتوم میان AB و CD = $\dot{m}\,(v_2 - v_1)$

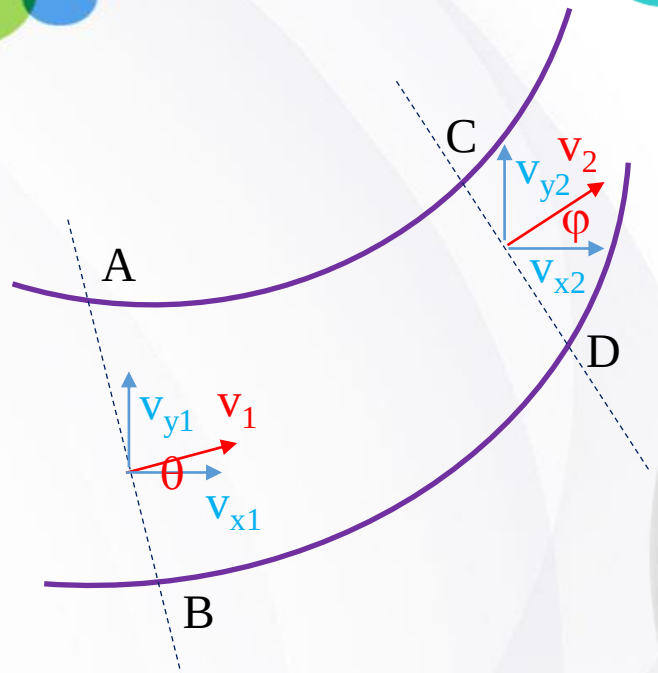
$$\text{تغییر سرعت} \times \text{شدت جریان جرمی} = \Rightarrow F = \dot{m}\,(v_2 - v_1)$$

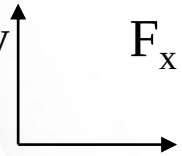
✓ معادله مومنتوم برای یک جریان دو بعدی و سه بعدی در طول جریان:

همان گونه که در بالا گفته شد، معادله مومنتوم برای جریان یک بعدی تعیین شد و می توان از همین اصول جهت بدست آوردن جریان دو بعدی و سه بعدی استفاده کرد. یک لوله جریان (حجم کنترل) را در نظر بگیرید. با فرض جریان پایدار و یکنواخت در سطح مقطع های داده شده، (لازم به ذکر است فرض های بیان شده باعث بوجودآمدن خطا در معادلات می شود، که بعدا تصحیح می شوند.) مولفه های سرعت در جهات مختلف را بدست می آوریم.

در لوله جریان، مقطع AB ورودی و مقطع CD خروجی است. در هر دو مکان، سرعت سیال عمود بر سطح مقطع است. زاویه ای که بردار سرعت سیال با ورودی AB دارد، θ و زاویه ای که بردار سرعت سیال با خروجی CD دارد، φ است.

جهت بدست آوردن معادله مومنتوم از تجزیه برداری استفاده می شود.





تغییر سرعت در جهت x × شدت جریان جرمی = نرخ تغییر مومنتوم در جهت x F_x

$$= \dot{m}\,(v_2\cos\varphi - v_1\cos\theta) = \dot{m}\,(v_{x2} - v_{x1})$$

به همین ترتیب در راستای y داریم:

$$F_y = \dot{m}\,(v_2\sin\varphi - v_1\sin\theta) = \dot{m}\,(v_{y2} - v_{y1})$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

این نیروها از چند جز تشکیل می شوند و عکس العمل هم دارند.

سرعت تغییر مومنتوم در آن جهت که از میان حجم کنترل عبور می کند = مجموع نیروهای وارد به سیال در یک حجم کنترل در یک جهت مشخص

$$\Rightarrow F = \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

در اینجا گفته می شود که F از سه مولفه تشکیل شده است.

F_1: نیروی موثر در جهت مشخص بر روی سیال درون حجم کنترل که بوسیله جسم سخت در درون حجم کنترل و یا در مرز حجم کنترل به

وجود آمده باشد. مانند نیرویی که یک پره، همزن، زانویی، خم و یا انحنا ایجاد می کنند.

F_2: نیروهای خارجی که بر جسم سیال وارد می شود و بستگی به جرم سیال دارند. مانند نیروی وزن یا ثقل. ممکن است نیروهای مغناطیسی هم از این نوع باشند.

F_3: نیروهایی که از اطراف حجم کنترل به سطح کنترل وارد می شوند. (سطح کنترل، سطحی است که حجم کنترل را در بر دارد.) این نیروها، نیروهای سطحی می باشند. مانند فشاری که به سطح وارد می شود.

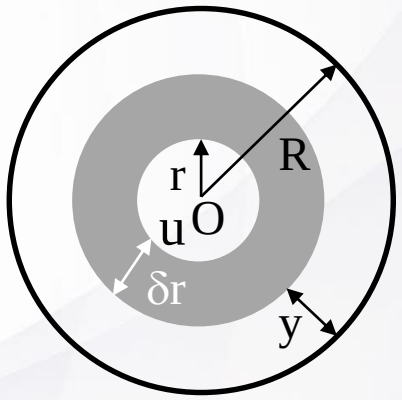
$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

$F_1 \rightarrow$ از درون سیال ناشی می شود، پس عکس العمل دارد $\rightarrow F_1 = -R$

$$\Rightarrow R = F_2 + F_3 - \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

✓ ضریب تصحیح مومنتوم:

مجموع شدت جریان مومنتوم برای تمام سطح $= \int \rho u^2 dA$



برای u باید یک رابطه توزیع تعریف کنیم:

رابطه توزیع پرانتل $= u = u_{max}\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$

مجموع شدت مومنتوم $= 1.02\,\rho\pi R^2\bar{u}^2$

بنابراین می توان رابطه مومنتوم را به صورت زیر تصحیح کنیم:

تئوریک × (ضریب تصحیح) β = شدت جریان مومنتوم واقعی

✓ **کاربرد معادله مومنتوم:**

۱) شتاب تدریجی سیال در یک لوله با صرف نظر از الاستیسیته:

مثال: آب درون یک لوله به طول 60 m و با سرعت 1.8 m/s جریان دارد. در این حالت اختلاف فشار ورودی و خروجی 25 kPa می باشد. چه اختلاف فشار اضافی لازم است برای اینکه شتابی برابر $0.02\ m/s^2$ ایجاد شود.

حل:

جرم مخصوص سیال: ρ طول لوله: l سطح مقطع لوله: A شتاب آب: a افزایش فشار برای ایجاد شتاب: δP

چون جریان پایدار نیست، یک سیستم و یک جرم مشخص در نظر گرفته می شود:

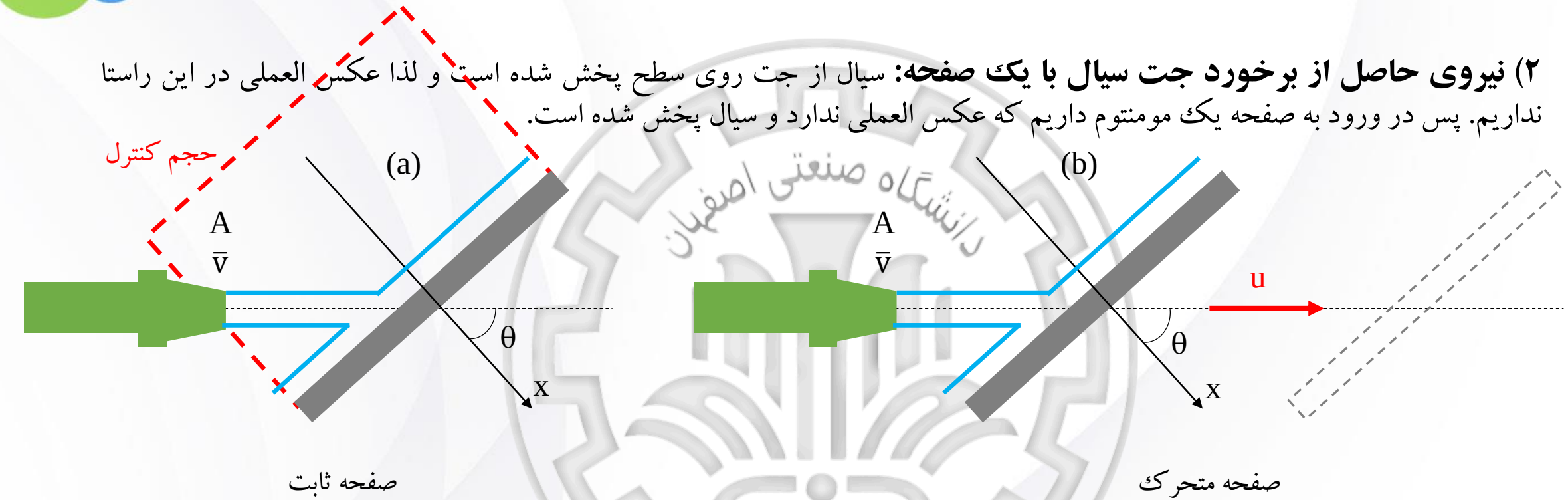
شتاب × جرم آب = نرخ تغییر مومنتوم آب در لوله = نیروی ایجاد شده از δP در جهت حرکت

$$= \text{سطح مقطع لوله} \times \delta P = A \times \delta P$$

$$\text{جرم آب} = \text{حجم} \times \text{جرم مخصوص} = Al\rho$$

$$A\delta P = \rho Ala \Rightarrow \delta P = \rho la = 1000 \times 0.02 \times 60 = 1200\ Pa$$

۲) نیروی حاصل از برخورد جت سیال با یک صفحه: سیال از جت روی سطح پخش شده است و لذا عکس العملی در این راستا نداریم. پس در ورود به صفحه یک مومنتوم داریم که عکس العملی ندارد و سیال پخش شده است.



این پدیده در حالت های زیر بررسی می شود:

(a) : ۱) سطح ثابت است و لرزش و تکان ندارد و اگر تکان داشته باشد، F وارده را مصرف می کند و هدر می دهد. ۲) سطح آنقدر صاف است که اصطکاک وجود ندارد، پس نیروی اصطکاک برای مصرف نیروی F نیست. به عبارتی، یک جت وارد شده و به صفحه ساکن برخورد کرده و تغییر مسیر داده در حالی که بین صفحه و جت هیچ اصطکاکی وجود ندارد، یعنی تغییر مومنتوم ایجاد شده است.

(b) : جت وارد می شود و صفحه در راستای جت حرکتی مانند u دارد.

برای شروع حجم کنترل را در نظر می گیریم. پس ورودی و خروجی مشخص می شود و برای حالت (a) (تنش برشی) و اصطکاک وجود ندارد و تغییر مسیر ایجاد می شود. در حالت (b) علاوه بر تغییر مسیر، صفحه حرکت کرده است.

مثال: یک جت آب از یک نازل ثابت با قطر 25 mm بر روی یک صفحه برخورد می کند. زاویه برخورد بر روی خط عمود بر صفحه 30 درجه است. سرعت جت ($\bar{v}$) 5 m/s است. سطح صفحه را بی اصطکاک فرض کنید. نیروی موثر عمود بر صفحه را محاسبه کنید. برای دو حالت:

۱) صفحه ثابت. ۲) صفحه با سرعت 2 m/s در جهت جت حرکت کند.

حل: ابتدا یک حجم کنترل در نظر می گیریم و ورودی و خروجی آن را بررسی می کنیم.

$$(a)\quad F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

$$R = -F_1 \Rightarrow R = F_2 + F_3 - \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

چون لایه سیال نازک است، این نیرو قابل صرف نظر کردن است $\leftarrow F_2 = 0$

چون در اتمسفر جت وارد می شود، اختلاف فشار ورودی و خروجی صفر است $\leftarrow F_3 = 0$

$$\Rightarrow R = -\dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

یعنی: (سرعت نهایی – سرعت اولیه) × شدت جریان جرمی = نیروی وارده بوسیله سیال بر روی صفحه در راستای x

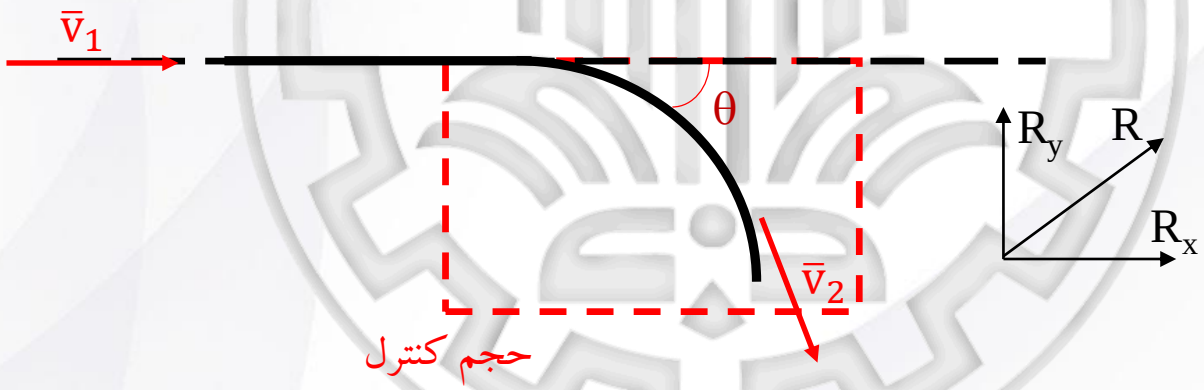
$$\dot{m} = A v \rho = \pi (0.0125)^2 \times 1000 \times 5 = 2.45 \quad kg/s$$

$$R = \dot{m} (\bar{v}\cos\theta - 0) = 2.45 \times 5 \times 0.87 = 10.66 \quad N$$

(b) x خروجی در راستای $= \bar{v} = 0$ x ورودی در راستای $= (\bar{v} - u)\cos\theta$

$$R = \dot{m} (\bar{v} - u)\cos\theta = 2.45 \times (5-2) \times \cos 30 = 6.365 \quad N$$

۳) نیروی حاصل از تغییر مسیر جت سیال توسط یک تیغه منحنی: برای یک تیغه منحنی ممکن است که قدر مطلق سرعت یا جهت سرعت روی آن تغییر کند که در این صورت تغییر مومنتوم رخ داده است. لذا از سیال، یک نیرویی به تیغه وارد می شود و تیغه عکس العملی نشان می دهد.



در شکل بالا یک تیغه که زاویه ای نسبت به خط افق دارد، نشان داده شده و یک جت سیال بر روی آن وارد می شود که سرعت $\bar{v}_1$ در ورودی و $\bar{v}_2$ در خروجی دارد. ابتدا یک حجم کنترل در نظر می گیریم.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

چون جت در اتمسفر وارد می شود، پس F_3 صفر است و یک لایه نازک از سیال وارد می شود، پس F_2 هم صفر می شود و F_1 نیروی عکس العمل دارد. باید R در راستاهای مختلف مشخص شود.

مثال: یک جت آب از یک فواره با برخورد به یک تیغه منحنی، تغییر مسیر با زاویه 60 درجه از مسیر اصلی خود می دهد. جت به طور مماسی وارد می شود و دارای ضربه، تکانه و غیره نیست. متوسط سرعت ورودی 30 m/s و سرعت خروجی 25 m/s است. اگر شدت جریان جرمی این فواره 0.8 kg/s باشد، قدر مطلق و جهت برایند نیرو بر روی تیغه را محاسبه کنید. فرض کنید تیغه ثابت است.

حل:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

$$x : R_x = -\,\dot{m}\,(v_{out} - v_{in})_x$$

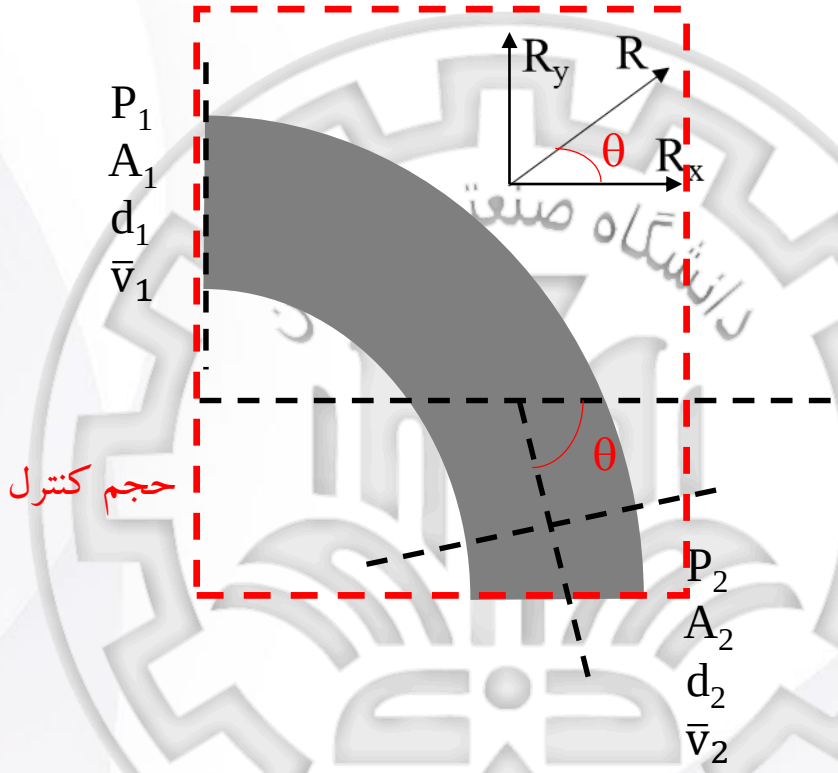
$$x : \bar{v}_{in} = \bar{v}_1\ ,\ \bar{v}_{out} = \bar{v}_2\cos\theta \Rightarrow R_x = \dot{m}\,(\bar{v}_1 - \bar{v}_2\cos\theta) = 14\ \text{N}$$

$$y : R_y = -\,\dot{m}\,(v_{out} - v_{in})_y$$

$$y : \bar{v}_{in} = 0\ ,\ \bar{v}_{out} = \bar{v}_2\sin\theta \Rightarrow Ry = \dot{m}\,\bar{v}_2\sin\theta = 17.32\ \text{N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 22.27\ \text{N}\ ,\quad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = 1.24 \Rightarrow \theta = 51.05^\circ$$

٤) نیروی وارد بر یک زانویی: در این حالت سیال وارد زانویی شده و با انحنای زانویی، تغییر مسیر می دهد.



مانند موارد قبل، یک حجم کنترل در نظر گرفته، محل ورودی و خروجی زانویی را مشخص می کنیم. در اینجا نیروی پیش برنده در یک سطح بسته فشار است.

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

مثال: یک زانویی باریک شونده که قطر آن از d_1 در ورودی معادل 500 mm به قطر d_2 برابر 250 mm در خروجی کاهش می یابد. در خروجی، جریان 45 درجه نسبت به ورودی تغییر مسیر می دهد. فشار اندازه گیری شده در ورودی $40\ kN/m^2$ و در خروجی $23\ kN/m^2$ است. اگر لوله برای انتقال روغن با دانسیته $850\ kg/m^3$ مورد استفاده باشد، قدر مطلق و جهت برایند نیرو بر روی زانویی را محاسبه کنید. شدت جریان روغن $0.45\ m^3/s$ می باشد. فرض کنید زانویی افقی است. (به عبارتی نیروی وزن اثر ندارد.)

حل:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(\bar{v}_{out} - \bar{v}_{in})$$

$$F_1 = -R_x \Rightarrow (F_1 + F_3)_x = \dot{m}\,(\bar{v}_{out} - \bar{v}_{in})_x \Rightarrow R_x = (F_3)_x - \dot{m}\,(\bar{v}_{out} - \bar{v}_{in})_x \Rightarrow (F_3)_x = (P_1A_1)_x - (P_2A_2\cos\theta)_x$$

$$x: \bar{v}_{out} = \bar{v}_2\cos\theta\ ,\ \bar{v}_{in} = \bar{v}_1$$

$$R_x = (P_1A_1)_x - (P_2A_2\cos\theta)_x - \rho Q(\bar{v}_2\cos\theta - \bar{v}_1)$$

$$(F_1 + F_3)_y = \dot{m}\,(\bar{v}_{out} - \bar{v}_{in})_y\ ,\ (F_3)_y = P_2A_2\sin\theta$$

$$y: \bar{v}_{out} = -\bar{v}_2\sin\theta\ ,\ \bar{v}_{in} = 0$$

$$R_y = P_2A_2\sin\theta + \rho Q(\bar{v}_2\sin\theta)$$

$$Q = VA \Rightarrow \bar{v}_1 = \frac{Q}{A} = \frac{0.45}{\pi \times 0.25^2} = 2.3 \text{ m/s} , \bar{v}_2 = \frac{0.45}{\pi \times 0.125^2} = 9.183 \text{ m/s}$$

$$R_x = (P_1A_1)_x - (P_2A_2\cos\theta)_x - \rho Q(\bar{v}_2 \cos\theta - \bar{v}_1)$$

$$= (40\times10^3 \times \pi(0.25)^2) - (23\times10^3 \times \pi(0.125)^2 \times \cos45) - (850\times0.45\,(9.183\cos45-2.3)) = 5.57 \text{ kN}$$

$$R_y = P_2A_2\sin\theta + \rho Q(\bar{v}_2 \sin\theta)$$

$$= (23\times10^3 \times \pi(0.125)^2 \times \sin45) + (850\times0.45\,(9.183\sin45)) = 3.62 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6.56 \text{ kN} , \tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = 0.65 \Rightarrow \theta = 33.02^\circ$$

۵) عکس العمل یک جت (نیروی پیش برنده): وقتی سیال به یک جسم نیرو وارد کند، عکس العمل آن، نیروی پیش برنده خواهد بود.

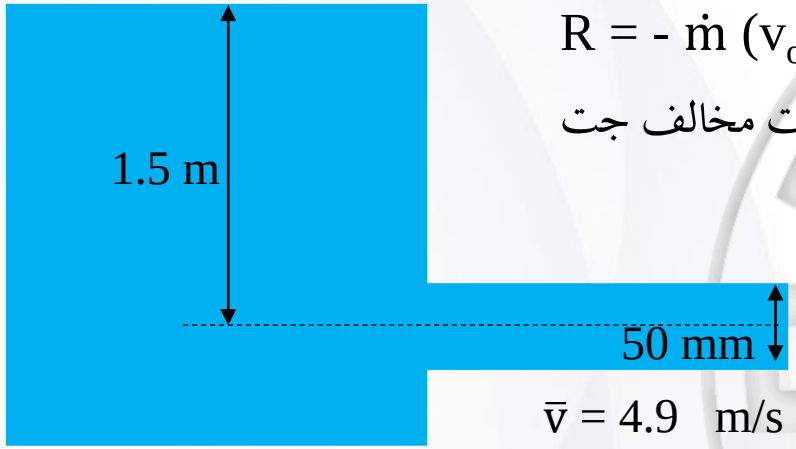
مثال: یک جت آب با قطر $d = 50$ mm با سرعت 4.9 m/s از سوراخ یک طرف تانک عمودی رو باز خارج می شود. تانک همیشه تا ارتفاع 1.5 m بالای مرکز سوراخ پر است. عکس العمل جت را بر روی تانک محاسبه کنید:

۱) وقتی تانک ثابت باشد. ۲) وقتی تانک با سرعت 2 m/s در جهت عکس جت حرکت کند. همچنین چه مقدار کار در ثانیه انجام شده است. (فرض کنید سرعت نسبی جت تغییر نکند.)

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \dot{m}\,(\bar{v}_{out} - \bar{v}_{in})$$

(a) چون هر دو در اتمسفر هستند، بنابراین: $F_3 = 0$

چون لایه سیال نازک است، از وزن آن صرف نظر می شود: $F_2 = 0$



$$R = -\,\dot{m}\,(v_{out} - v_{in})$$

افزایش سرعت در جهت جت × شدت جریان جرمی = نیروی عکس العمل در جهت مخالف جت

$$\dot{m} = \rho A V = 1000 \times \pi(0.025)^2 \times 4.9 = 9.616 \quad kg/s$$

$$R = 9.616\,(0 - 4.9) = -\,47.12 \quad N$$

(b):

$$v_{out} = \bar{v} - u\,, \quad v_{in} = -u \;\Rightarrow\; R = -\,9.616\,(\bar{v} - u + u) = -\,47.12$$

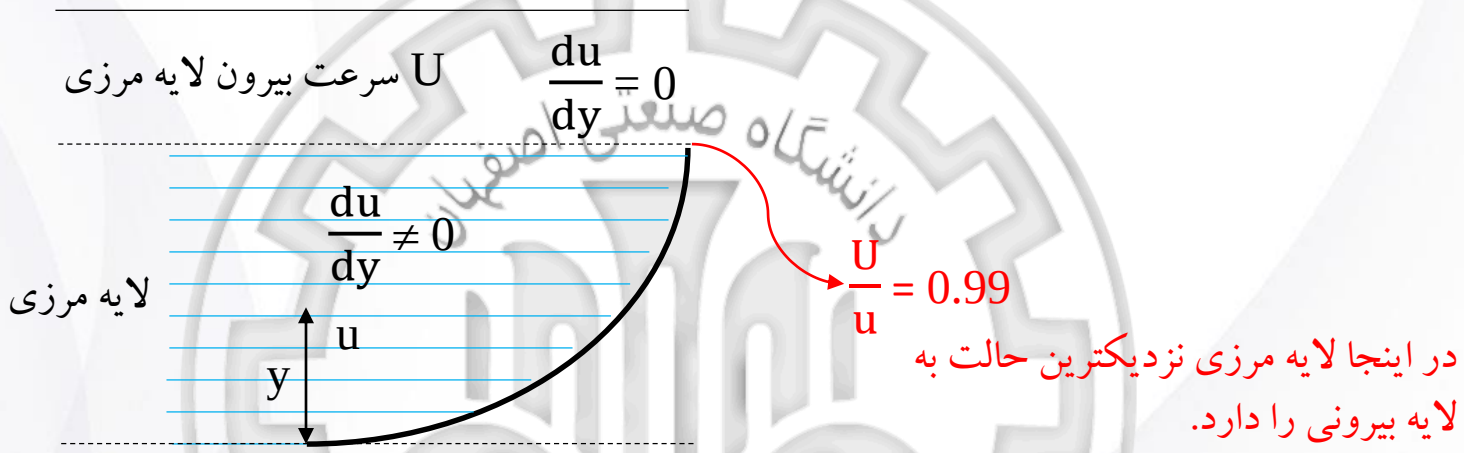
کار = نیرو × جابه جایی

$$\text{توان} = \frac{\text{کار}}{\text{زمان}} = \frac{F \times \text{جا به جایی}}{\text{زمان}} = \frac{F \times x}{t} = F \times v = (-47.12) \times (-1.2) = 56.54 \quad W$$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

✓ کاربرد مومنتوم در لایه مرزی:

لایه مرزی یک لایه ای است که از بستر جامد متاثر است و تغییرات سرعت در این لایه مرزی اتفاق می افتد ولی بیرون لایه مرزی تغییرات سرعت صفر است.

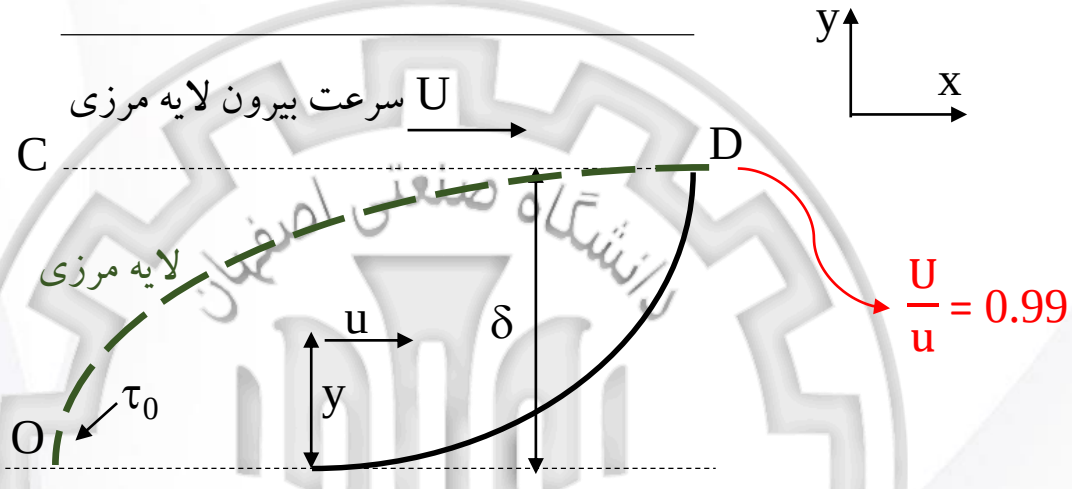


بیرون لایه مرزی، سرعت متاثر از تنش لایه مرزی نیست. در لایه مرزی، نیروهای پیوستگی بین سیال و بستر باعث ایجاد تنش می شوند، در نتیجه اصطکاک بین سیال و بستر ایجاد می شود، پس نیروی مقاومت ناشی از اصطکاک در جهت عکس حرکت موسوم به نیروی Drag عمل می کند. وقتی سیال بر روی یک سطح ثابت مثل سطح نشان داده شده، حرکت کند تنش برشی میان سطح و سیال بوجود می آید که ناشی از نیروهای چسبندگی و پیوستگی است.

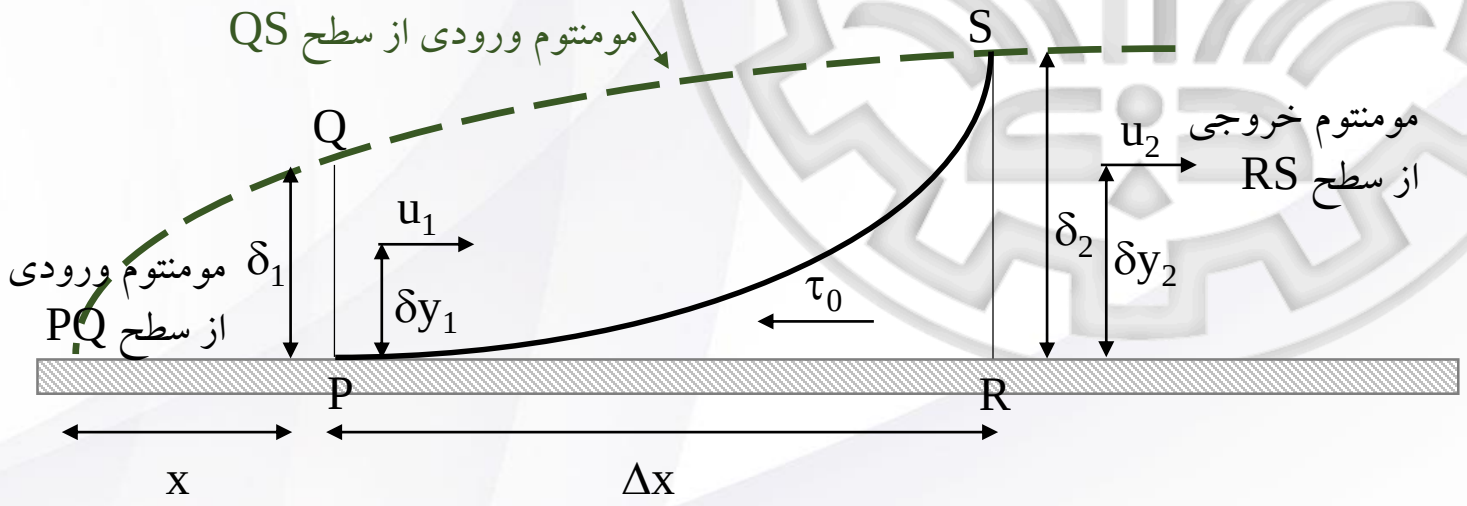
سیال در جهت x و y روی سطح حرکت می کند. وقتی که سیال وارد سطح می شود، لایه مرزی توسعه پیدا می کند. در اینجا تنش اصطکاکی به نام τ_0 ایجاد می شود. اگر در امتداد حرکت به سطح CD برسیم، بیرون لایه مرزی تعریف می شود که دارای سرعت U است

و بیرون لایه مرزی سرعت ثابت می باشد. اگر ضخامت لایه مرزی δ باشد،

هرگاه ضخامت به δ برسد، بیرون لایه مرزی قرار داریم. اگر درون لایه مرزی فاصله ای مانند y را بررسی کنیم، دارای سرعت u است.



اکنون یک المان از سیال را در نظر می گیریم:



اثبات را از طریق تغییرات مومنتوم انجام می دهیم.

اگر المان PQRS از سیال را در نظر بگیریم که معادل با حجم کنترل باشد، دارای یک لایه مرزی به طول Δx و در فاصله ای مانند x از شروع جریان بالا دستی است، جریان از مقطع PQ وارد و از سطح بالایی QS هم وارد حجم کنترل شده و از مقطع RS، حجم کنترل را ترک و خارج می شود. به عبارت دیگر، هدف تعیین نیرویی است که باعث تغییرات در مومنتوم می شود. یک المان با فاصله δy_1 و سرعت u_1 در ورودی PQ و یک المان با فاصله δy_2 و سرعت u_2 در خروجی RS در نظر می گیریم و میزان ورودی از QS اختلاف این دو المان می باشد. همچنین فرض شود عرض صفحه B باشد.

سرعت × شدت جریان جرمی = شدت مومنتوم از عنصر کوچک

$$= \rho B \delta y u \times u = \rho B \delta y u^2$$

$$\text{شدت از مقطع RS} = \rho B \int_0^{\delta_2} u_2^2 \, dy$$

$$\text{شدت از مقطع PQ} = \rho B \int_0^{\delta_1} u_1^2 \, dy$$

$$Q = B \delta y u$$

$$\text{از مقطع QS} \quad Q = RS \text{ از مقطع } Q - PQ \text{ از مقطع } Q = B \int_0^{\delta_2} u_2 \, dy - B \int_0^{\delta_1} u_1 \, dy$$

مومنتوم در جهت x از QS:

$$= \dot{m} \times U = \rho QU = \rho \{B \int_0^{\delta_2} u_2 \, dy - B \int_0^{\delta_1} u_1 \, dy\} U$$

$- \tau_0 B \Delta x =$ x نیروی حاصل از تماس سیال با جداره سخت در جهت = نیروی برشی که در اثر اصطکاک بوجود آمده است

بنابراین نیرویی که تغییرات مومنتوم را بوجود می آورد، باید تعیین شود. نرخ تغییرات مومنتوم حاصل از نیروی F:

$$F = ma = m.\frac{v}{t}$$

$$- \tau_0 B \Delta x = \rho B \{\int_0^{\delta_2} u_2^2 \, dy - \int_0^{\delta_1} u_1^2 \, dy - U(\int_0^{\delta_2} u_2 \, dy - \int_0^{\delta_1} u_1 \, dy)\}$$

$$= \rho B \{\int_0^{\delta_2} (u_2^2 - U u_2) dy - \int_0^{\delta_1} (u_1^2 - U u_1) dy\}$$

مقدار درون کروشه، تفاوت میان $\int_0^{\delta} (u^2 - Uu) dy$ در مقطع های RS و PQ می باشد:

$$= \Delta \left[\int_0^{\delta} u(u - U) dy\right]$$

$$- \tau_0 B \Delta x = \rho B \Delta \left[\int_0^{\delta} u(u - U) dy\right] \Rightarrow \tau_0 = - \rho \frac{\Delta \left[\int_0^{\delta} u(u-U) dy\right]}{\Delta x} = \rho \frac{\Delta \left[\int_0^{\delta} u(U-u) dy\right]}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right) dy \Rightarrow \boxed{D = B \int_0^{x} \tau_0 dx}$$

✓ مومنتوم دورانی:

در بخش قبل، مومنتوم برای یک ذره در راستای خط مستقیم بررسی شد. به عبارتی سرعت خطی بود. مشابه موارد قبل، می توان مومنتوم را برای حرکت دورانی محاسبه کرد:

θ = جابه جایی زاویه ای

سرعت دورانی یا زاویه ای بر حسب زمان و جابه جایی که مقدار آن بر حسب rad است:

$$\boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}}$$

شتاب زاویه ای یا نرخ تغییر ω نسبت به زمان:

$$\boxed{\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt}}$$

می توان روابط سرعت و شتاب را برای حالات خطی و دورانی بدین ترتیب نوشت:

برای حالت خطی:

$$v_2 = v_1 + at \qquad s = v_1 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad v_2^2 = v_1^2 + 2as$$

برای حالت دورانی:

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t,\ \theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,\ \omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta$$

ممان خطی $= v_\theta = \omega r$

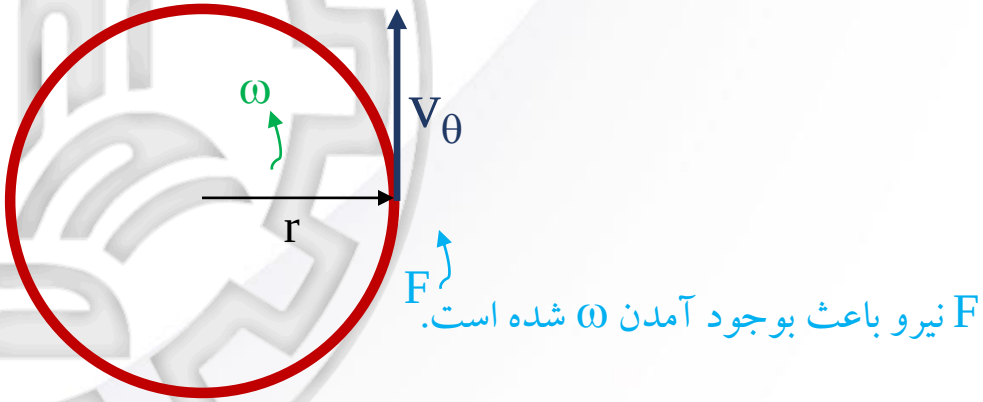
مومنتوم ذره $= mv_\theta = m\omega r$

نرخ تغییر مومنتوم $= \dfrac{m\omega r}{t}$

نیرویی که مومنتوم را بوجود آورده است : $F = \dfrac{m\omega r}{t}$

گشتاور: $T = F \times r = mr^2\dfrac{\omega}{t}$

گشتاور در موقعیت اولیه: $T_1 = mr_1^2.\dfrac{\omega_1}{t}$, $T_2 = mr_2^2.\dfrac{\omega_2}{t}$



F نیرو باعث بوجود آمدن ω شده است.

تغییرات گشتاور یا گشتاور مورد نیاز جهت ایجاد مومنتوم دورانی:

$$= \frac{m}{t}(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) = \dot{m}(v_{\theta 2} r_2 - v_{\theta 1} r_1) \Rightarrow \boxed{T = \rho Q (v_{\theta 2} r_2 - v_{\theta 1} r_1)}$$

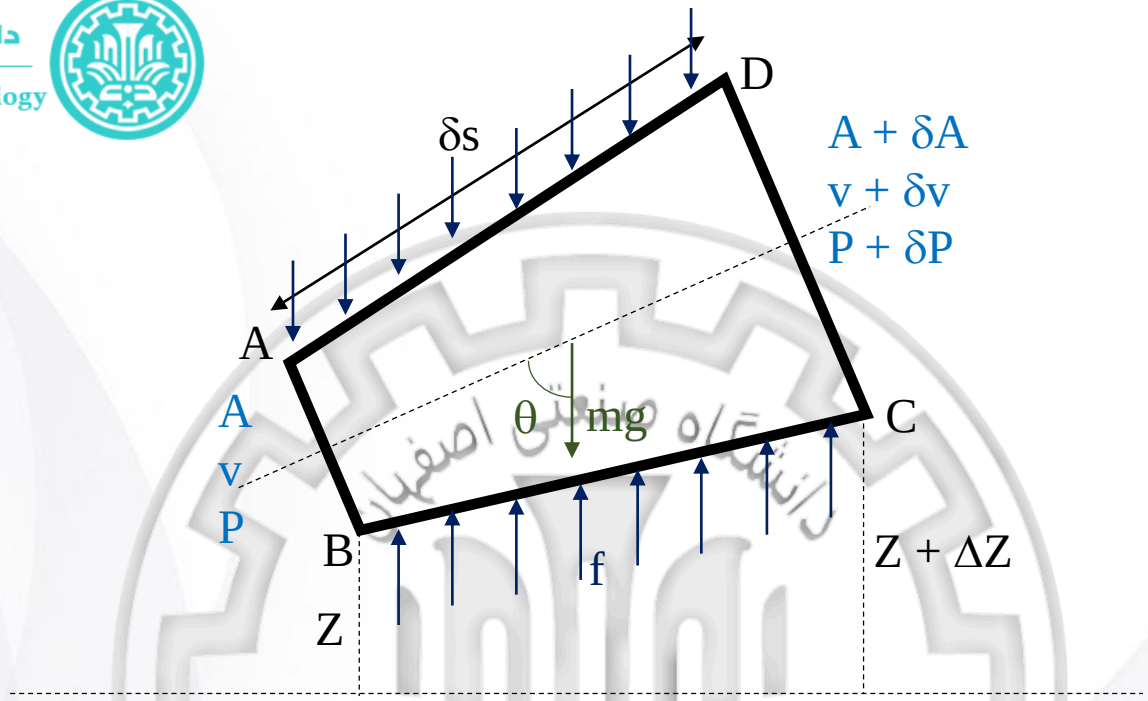
مثال: یک توربین آب با سرعت 240 rpm چرخش می کند. آب وارد پره متحرک چرخش در شعاع 1.2 m می شود. با سرعت متوسط 2.3 m/s در جهت حرکت و مولفه های ممان در خروجی 0.2 m/s در شعاع 1.6 m است. اگر شدت جریان حجمی توربین $10\ m^3/s$ باشد، گشتاور موثر بر قدرت ورودی را بدست آورید.

حل:

$$T = 1000 \times 10\ \{(0.2 \times 1.6) - (1.2 \times 2.3)\} = -24400 \quad N.m$$

✓ معادله اولر برای حرکت در طول یک خط جریان:

در این بخش هدف تعیین رابطه ای مابین پارامترهای سرعت، فشار، ارتفاع و جرم مخصوص است. به بیان ساده، زمانی که از نقطه ای در یک جریان به نقطه دیگری از جریان حرکت کنیم، تغییر مومنتوم بوجود آمده از چه نیروهایی ناشی شده است. ابتدا یک حجم کنترل مثلا به صورت یک لوله واگرا در نظر می گیریم.



تعریف فشار جانبی: $f = P + k\Delta P$

فشار در سطح مقطع AB معادل P و در سطح مقطع DC معادل $P + \Delta P$ است. اگر در تعریف فوق، $k = 0$ باشد، P_A بدست می آید و اگر $k = 1$ باشد، P_D حاصل می شود. نیروی اعمال شده به سیال برابر تغییرات مومنتوم است.

نیروی فشاری ورودی، خروجی و جانبی + نیروی وزن = تغییرات مومنتوم ورودی و خروجی

از قبل می دانیم که:

$$\dot{m} = \rho Q = Av\rho$$

نرخ افزایش مومنتوم از AB به CD برابر است با:

$= \rho Av\,(v_{out} - v_{in}) = \rho Av\,\{(v + \delta v) - v\} = \rho Av.\delta v$

نیروی ناشی از P در جهت جریان : PA

نیروی ناشی از $P + \Delta P$ در خلاف جهت جریان : $(P + \delta P)(A + \delta A)$

نیروی ناشی از f : $f.\,\delta A$

نیروی ناشی از وزن : $mg\cos\theta$

برایند نیرو در جهت حرکت $= PA - (P + \delta P)(A + \delta A) + f.\,\delta A - mg\cos\theta$

$mg = \rho g \times \text{حجم} = \rho g\,(A + \frac{1}{2}\delta A)\,\delta s$

$\cos\theta = \frac{\delta z}{\delta s}$ ، $f = P + k\Delta P$

با جایگذاری روابط و صرف نظر کردن از $\delta \times \delta$ داریم:

$= - A\delta P - \rho gA\delta z$

$\rho Av\delta v = - A\delta P - \rho gA\delta z$

دانشکده مهندسی نساجی
Isfahan University of Technology

با تقسیم طرفین بر $\rho A \delta s$

$$\frac{1}{\rho}.\frac{\delta P}{\delta s}+v.\frac{\delta v}{\delta s}+g.\frac{\delta z}{\delta s}=0$$

زمانی که $\delta s \to 0$

$$\frac{1}{\rho}.\frac{dP}{ds}+v.\frac{dv}{ds}+g.\frac{dz}{ds}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{معادله اولر}$$

رابطه فوق، فرم دیفرانسیل رابطه میان فشار، ارتفاع، سرعت و دانسیته می باشد. وقتی می توان معادله را حل کرد که مشخص شود، سیال تراکم پذیر یا تراکم ناپذیر است. فرض می شود سیال تراکم ناپذیر و دانسیته سیال ثابت است، بنابراین می توان معادله اولر را به صورت انرژی به ازای واحد جرم نوشت:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz = \text{ثابت}$$

انرژی پتانسیل به ازای واحد جرم : gz

انرژی جنبشی به ازای واحد جرم : $\frac{v^2}{2}$

انرژی فشاری به ازای واحد جرم : $\frac{P}{\rho}$ (انرژی فشاری نوعی انرژی پتانسیل گذرا است.)

با تقسیم معادله اولر بر g، می توان به معادله انرژی به ازای واحد وزن (معادله برنولی) رسید:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H = \text{ثابت}$$

اگر معادله برنولی را در ρg ضرب کنیم، معادله انرژی به ازای واحد حجم بدست می آید:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{ثابت}$$

با فرض اینکه سیال تراکم ناپذیر است، معادله را بین دو نقطه می نویسیم:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

اگر سیال تراکم پذیر باشد، باید معادله زیر حل شود:

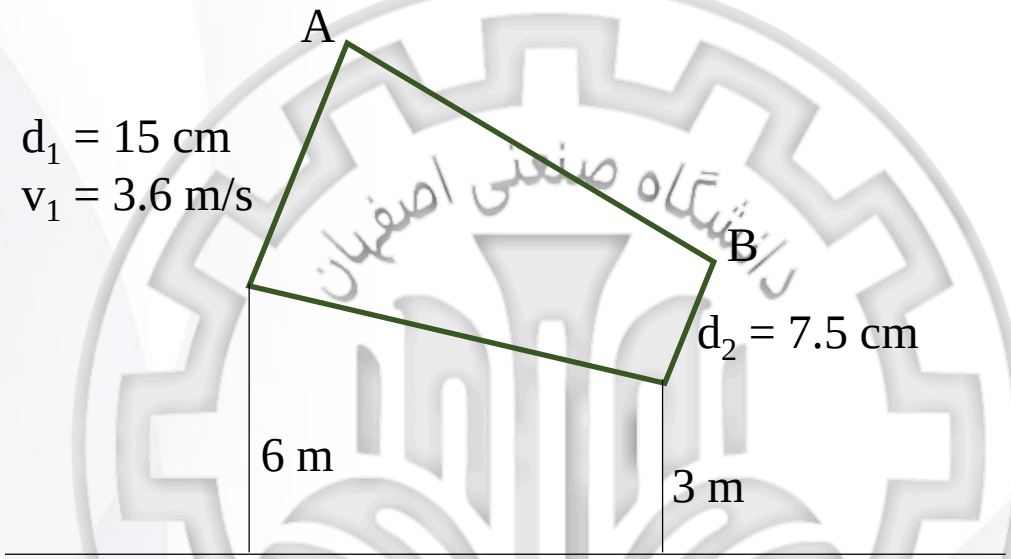
$$\int \frac{dP}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H$$

برای حل انتگرال $\int \frac{dP}{\rho g}$، باید دو قانون هم دما و بی دررو جداگانه بررسی شوند.

مثال: یک لوله به طور مایل قرار گرفته است. قطر لوله در سطح مقطع A برابر 15 cm و در سطح مقطع B برابر 7.5 cm می باشد. نقطه A،

6 m بالای خط مبنا و نقطه B، 3 m بالای خط مبنا قرار دارند. سرعت آب در نقطه A برابر با 3.6 m/s می باشد. مطلوبست محاسبه فشار در نقطه B. فشار در نقطه A را $100\ kN/cm^2$ در نظر بگیرید.

حل:



$$Q_A = Q_B \Rightarrow A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow \pi(0.075)^2 \times 3.6 = \pi(0.0375)^2 \times v_B \Rightarrow v_B = 14.4 \ \ m/s$$

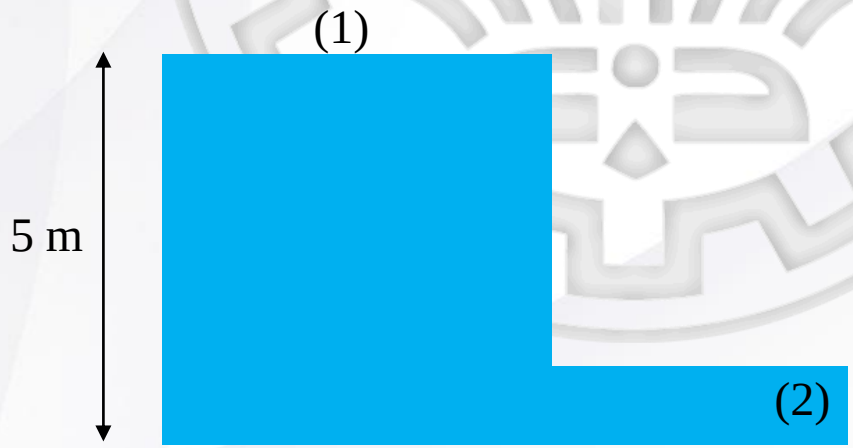
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{100 \times 10^4}{1000 \times 9.81} + \frac{3.6^2}{2 \times 9.8} + 6 = \frac{P_2}{1000 \times 9.8} + \frac{14.4^2}{2 \times 9.8} + 3 \Rightarrow P_2 = 931788 \quad Pa$$

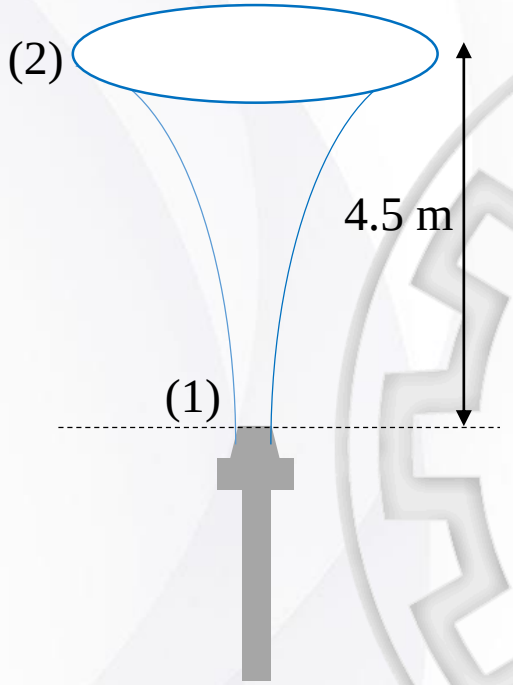
تکالیف:

۱) یک جت آب از یک فواره در برخورد با یک تیغه منحنی که زاویه 60 درجه نسبت به افق دارد، تغییر مسیر از جهت اصلی خود می دهد. جت به طور مماسی وارد می شود و دارای ضربه و تکانه نیست. سرعت متوسط ورودی جت 30 m/s و سرعت متوسط خروجی 25 m/s است. اگر شدت جریان جرمی آب 0.8 kg/s باشد. قدر مطلق و جهت برایند نیرو بر روی تیغه را محاسبه کنید. (تیغه ثابت است).

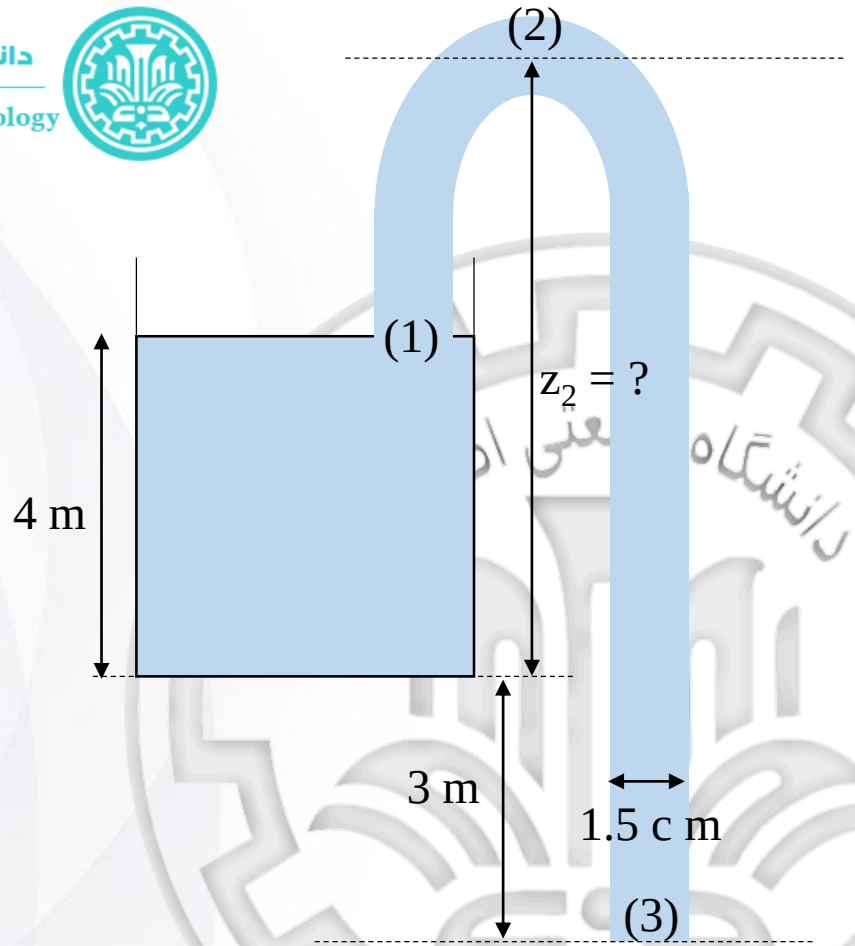
۲) مخزنی با قطر 3 m حاوی سیالی است. مخزن تا ارتفاع 5 m پر از مایع بوده و یک لوله تخلیه جهت خارج کردن سیال به مخزن متصل است. سرعت سیال در قسمت خروجی را محاسبه کنید.



۳) یک جت آب از یک نازل با قطر 25 mm به سمت بالا جریان دارد. فرض کنید جت به صورت دایره ای باقی می ماند. با صرف نظر کردن از هر گونه اتلاف انرژی، قطر جت در ارتفاع 4.5 m را محاسبه کنید. سرعت آب از نازل 12 m/s می باشد.



۴) لوله ای به قطر 1.5 cm برای تخلیه آب از یک مخزن استفاده می شود. انتهای لوله تخلیه 3 m پایین تر از کف مخزن قرار دارد. سطح آب در مخزن 4 m است. بیشترین ارتفاع لوله که بتوان بدون افت فشار، آب را تخلیه کرد بدست آورید. فشار بخار آب در درون لوله 4.246 kPa است. فرض کنید جریان غیر لزج، تراکم ناپذیر و پایدار باشد. فشار اتمسفر معادل 101.3 kPa است .



۵) در شکل یک آب پاش متقارن نشان داده شده است که دبی کل خروجی آن 0.9 l/s می باشد. آب پاش بدون اصطکاک است. سرعت دورانی آب پاش را بر حسب rpm بدست آورید. قطر خروجی 6 mm است.